Kapitola 24

Geometrické modelování a výpočetní geometrie

24.1 Rozsah látky

Seznam oficiálních státnicových otázek:

Projektivní rozšíření afinního prostoru, homogenní souřadnice, afinní a projektivní transformace v rovině a v prostoru, kvaterniony v reprezentaci 3D orientace, diferenciální geometrie křivek a ploch, základní spline funkce, kubické spliny C2 a jejich vlastnosti, interpolace kubickými spliny, Bézierovy křivky, Catmull-Rom spliny, B-spline, de Casteljaův a de Boorův algoritmus, aproximační plochy, plochy zadané okrajem, Bezierovy plochy, plátování, B-spline plochy, NURBS plochy, základní věty o konvexitě, kombinatorická složitost konvexních mnohostěnů, návrh geometrických algoritmů a jejich složitost, Voroného diagram a Delaunayova triangulace, konvexní obal, lokalizace, datové struktury a algoritmy pro efektivní prostorové vyhledávání.

24.2 Projektivní rozšíření afinního prostoru, homogenní souřadnice, afinní a projektivní transformace v rovině a v prostoru

Afinní prostor:

- A_n — neprázdná množina bodů
- W_n — vektorový prostor (zaměření)
- $f : A_n \times A_n \to W_n$
- $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$
- $\forall P \in A_n, \forall X \in A_n : f_P(x) = f(P, X)$ je bijektivní

Běžně $A_n = R^n, W_n = R^n, f(A, B) = B - A$.
Soustava souřadnic
Repér: pevný bod O + báze zaměření
Transformace souřadnic
Lineárně nezávislé body
$B_0, B_1, \ldots, B_n$ jsou LN $\Leftrightarrow (B_1 - B_0), (B_2 - B_0), \ldots, (B_n - B_0)$ jsou LN
Afinní prostor dimenze n je jednoznačně určen n+1 body:

$$X = B_0 + \sum \beta_i (B_i - B_0) = B_0 + \sum \beta_i B_i - \sum \beta_i B_0 = B_0 \underbrace{(1 - \sum \beta_i)}_{\beta_0} + \sum \beta_i B_i$$

```
Afinní kombinace bodů (barycentrické souřadnice)
\(X = \beta_0 B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_n B_n\), \(\sum \beta_i = 1\)
Konvexní kombinace bodů - navíc požadavek \(\beta_i \geq 0, \forall i\)
```

24.3 Kvaterniony v reprezentaci 3D orientace

- $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (q_0, (q_1, q_2, q_3)) = (q_0, \overrightarrow{q})$
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k, ji = -k, \ldots$

Operace s kvaterniony

- $Q \cdot P = (q_0, \overrightarrow{q})(p_0, \overrightarrow{p}) = (q_0 p_0 - \overline{q}\overline{p}; q_0\overline{p} + p_0\overline{q} + (\overline{q} \times \overline{p})$ — komutativní pokud shodné vektorové části, jinak pouze asociativní a distributivní
- $Q^* = (q_0, -\overrightarrow{q})$
- $Q \cdot Q^* = (q_0^2 + \overline{q}\overline{q}; q_0\overline{q} - q_0\overline{q} + \overline{0}) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$
- $\|Q\| = \sqrt{Q \cdot Q^*}$
- $Q \cdot Q^{-1} = 1$

$$Q^* \cdot Q \cdot Q^{-1} = 1$$

$$Q^* \cdot Q \cdot Q^{-1} = Q^*$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

- Věta: $\|Q \cdot P\| = \|Q\| \cdot \|P\|$

Dk: $\|Q \cdot P\| = \sqrt{(Q \cdot P) \cdot (Q \cdot P)^*} = \sqrt{(Q \cdot P) \cdot (P^* \cdot Q^*)} = \sqrt{Q \cdot P \cdot P^* \cdot Q^*} = \sqrt{\|P\| Q \cdot Q^*} = \sqrt{\|P\|^2 \|Q\|^2} = \|Q\| \cdot \|P\|$

Jednotkové kvaterniony

- $\|Q\| = 1$
- tvoří multiplikativní podgrupu
- $Q^{-1} = Q^*$
- Jednotkový kvaternion je tvaru: $Q = (cos(\alpha), sin(\alpha) \cdot \overline{a}), \|\overline{a}\| = 1$

Rotace

Interpolace rotace

1. Lineární Eulerova interpolace
2. Kvaterniony — LERP
3. SLERP — sférická lineární interpolace

24.4 Diferenciální geometrie křivek a ploch

24.5 Základní spline funkce

24.6 Kubické spliny C2 a jejich vlastnosti, interpolace kubickými spliny

24.7 Bézierovy křivky

24.8 Catmull-Rom spliny

24.9 B-spline

24.10 De Casteljaův a de Boorův algoritmus

24.11 Aproximační plochy, plochy zadané okrajem, Bezierovy plochy, plátování, B-spline plochy, NURBS plochy

24.12 Základní věty o konvexitě, kombinatorická složitost konvexních mnohostěnů

24.13 Návrh geometrických algoritmů a jejich složitost

24.14 Voroného diagram a Delaunayova triangulace

24.15 Konvexní obal, lokalizace, datové struktury a algoritmy pro efektivní prostorové vyhledávání

24.16 Materiály

- …