Kapitola 1

Státnice - Aproximační algoritmy a schémata

1.1 Aproximační algoritmy

Definice (Aproximační algoritmus)

Aproximační algoritmus běží v polynomiálním čase a vrací řešení "blízká" optimu. Je nutné mít nějakou míru kvality řešení. Označme:

- C^* hodnotu optimálního řešení
- C hodnotu nalezenou aproximačním algoritmem

A předpokládejme nezáporné hodnoty řešení.

Definice (Poměrová chyba)

Řekneme, že algoritmus řeší problém s poměrovou chybou $\rho(n)$, pokud pro každé zadání velikosti n platí:

$$\max\{\frac{C^*}{C}, \frac{C}{C^*}\} \leq \rho(n)$$

Definice (Relativní chyba)

Řekneme, že algoritmus řeší problém s relativní chybou $\varepsilon(n)$, pokud pro každé zadání velikosti n platí:

$$\frac{|C - C^*|}{C^*} \leq \varepsilon(n)$$

Poznámka (O převodu chyb)

Z jedné chyby se dá vyjádřit druhá:

- V případě maximalizační úlohy: $\varepsilon(n) = \frac{C-C^*}{C^*} = \frac{C}{C^*} - 1 = \rho(n) - 1$
- V případě minimalizační úlohy: $\varepsilon(n) = \frac{C^*-C}{C^*} = 1 - \frac{1}{\rho(n)}$

Příklad (Aproximační algoritmy pro vrcholové pokrytí)

- "Brát vrcholy od nejvyššího stupně, dokud nemám celé pokrytí" nemá konstantní relativní chybu – ex. protipříklad, kdy $\rho(k) \leq a \cdot \ln k$
- "Vzít libovolnou hranu, dát do pokrytí její dva konce, odstranit její incidentní hrany a projít tak celé E" má relativní chybu 2 – žádné 2 hrany nemají společný vrchol, tj. mám pokrytí o velikosti $2 \times |\text{mn. disj. hran}|$. Každé vrcholové pokrytí je ale $\geq |\text{mn. disj. hran}|$.

Příklad (Aproximační algoritmy pro TSP)

Omezení na trojúhelníkovou nerovnost – pořád je NP (převod HK→TSP zachovával trojúhelníkovou nerovnost). Algoritmus:

1. Najdi minimální kostru T
2. Zvol lib. vrchol a pomocí DFS nad T v PRE-ORDERu očísluj vrcholy.
3. Cesta (s opakováním) po kostře T přes všechny vrcholy $:= X$. Pak $w(X) = 2w(T)$ (každou hranou kostry jdu tam a zpět).
4. Výslednou HK H vyrobím zkrácením cesty (vypouštěním již navštívených vrcholů), z trojúhelníkové nerovnosti $w(H) \leq w(X)$. Celkem tedy dává $w(H) \leq w(X) \leq 2w(H^*)$, protože $w(T) \leq w(H^*)$ (H^* je kostra, bez jedné hrany).

Bez omezení – pro žádné konstantní ρ neexistuje polynomiální algoritmus, řešící obecný TSP s poměrovou chybou ρ. Mohu totiž mít HK v grafu $G = (V, E)$, pak zadání TSP zkonstruovat jako $K_{|V|}(V, V \times V)$, kde $w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E \\ |V|\rho & e \notin E \end{cases}$. Pak by aproximační algoritmus s chybou ρ musel určitě vždy vrátit přesné řešení, takže by musel být NP-těžký.

1.2 Aproximační schémata

Definice (Aproximační schéma)

Aproximační schéma pro optimalizační úlohu je aproximační algoritmus, který má jako vstup instanci dané úlohy a číslo $\varepsilon > 0$, a který pro libovolné ε pracuje jako aproximační algoritmus s relativní chybou ε. Doba běhu může být exponenciální jak vzhledem k n – velikosti vstupní instance, tak vzhledem k $\frac{1}{\varepsilon}$.

Definice (Polynomiální aproximační schéma)

Polynomiální aproximační schéma je takové aproximační schéma, které pro každé pevné $\varepsilon > 0$ běží v polynomiálním čase vzhledem k n (ale stále může být exponenciální vzhledem k $\frac{1}{\varepsilon}$.

Definice (Úplně polynomiální aproximační schéma)

Úplně polynomiální aproximační schéma je polynomiální aprox. schéma, běžící také v polynomiálním čase vzhledem k $\frac{1}{\varepsilon}$ (tj. algoritmus s konstantně-krát menší relativní chybou běží v konstantně-krát delším čase).

Úplná polynomiálna aproximačná schéma pre problém batohu

Zadanie pre "dvojrozmernú variantu" problému batohu je n hmotností predmetov $w_1, w_2, \dots w_n$, obmedzenie W na celkovú hmotnosť a hodnoty predmetov $v_1, v_2, \dots, v_n$. Úlohou je nájsť takú množinu $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$, aby $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ a $\sum_{i \in S} v_i$ bolo čo najväčšie.

Nech $V = \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Zadefinujme si $W(i, v)$ ako najmenšia hmotnosť takej podmnožiny predmetov $\{w_1, \dots w_i\}$, ktorých celková hodnota je práve v. Potom:

$$W(i, v) = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ \infty & i = 0, v > 0 \\ W(i-1, v) & v_i > v \\ \min\{W(i-1, v), w_i + W(i-1, v - v_i)\} & \text{inak} \end{cases}$$

V treťom prípade nepridáme vec i, lebo by sme prekročili cenu v (spomeňme si na definíciu $W(i, v)$), v štvrtom ju pridáme ak nám nepokazí hmotnosť.

Pomocou tohto môžeme napísať algoritmus využívajúci dynamické programovanie a ako výsledok vrátime $\max\{v | W(n, v) \leq W\}$. Tento algoritmus bude mať zložitosť $n^2 V$, čo je iba pseudopolynomiálny algoritmus. Ten však môžeme upraviť.

Upravme si zadanie tak, že hodnoty všetkých predmetov orežeme o najnižšie bity. Ak chceme relatívnu chybu $\epsilon > 0$, tak orežeme $b = \lceil log \frac{\epsilon V}{n} \rceil$ bitov (nahradíme ich nulami) (prečo práve toľko bude vysvetlené nižšie). Tým sme získali novú inštanciu problému batohu, kde hmotnosti a limit sú rovnaké, ale pre každé i je hodnota predmetu $v_i' = 2^b \lfloor \frac{v_j}{2^b} \rfloor$. Náš algoritmus bude potrebovať čas $O(\frac{n^2 V}{2^b})$ (pretože ignorujeme nulové bity na konci každej hodnoty predmetu). Riešenie S', ktoré dostaneme bude možno rôzne od optima S pôvodnej úlohy, ale bude platiť:

$$\sum_{i \in S} v_i \geq \sum_{i \in S'} v_i \geq \sum_{i \in S'} v_i' \geq \sum_{i \in S} v_i' \geq \sum_{i \in S} (v_i - 2^b) \geq \sum_{i \in S} v_i - n2^b$$

Prvá nerovnosť platí, lebo S je optimum v pôvodnej úlohe, druhá lebo $v_i' \leq v_i$, tretia lebo S' je optimum novej úlohy, štvrtá lebo $v_i' \geq v_i - 2^b$ a posledná lebo $|S| \leq n$. Naše riešenie je teda najviac $n2^b$ pod optimom. Dolný odhad optima je V (predpokladáme, že každý predmet sa samotný vmestí do batoha, ináč môžeme príliš ťažké predmety vyhodiť ako preprocessing). Relatívna chyba je teda $\frac{\text{approx}-\text{opt}}{\text{opt}} \leq \frac{\text{approx}-\text{opt}}{V} \leq \frac{n2^b}{V} = \epsilon$

Takže pre zadané ϵ orežeme $b = \lceil log\frac{\epsilon V}{n} \rceil$ bitov a dostaneme algoritmus, ktorého relatívna chyba je ϵ a jeho časová zložitosť je $O(\frac{n^2 V}{2^b}) = O(\frac{n^3}{\epsilon})$, čo je polynomiálne aj v n aj v $\frac{1}{\epsilon}$, preto je to úplná polynomiálna aproximačná schéma.