Kapitola 1

Státnice - Věty o rekurzi

1.1 Věty o rekurzi

Věta (O rekurzi, o pevném bodě, self-reference)

Jestliže f je ORF jedné proměnné, potom existuje a takové, že $\varphi_{f(a)}(x) \simeq \varphi_a(x)$ pro všechna x (kde $\varphi_a(x)$ značí a-tou funkci, tedy odpovídá $\Psi_1(a,x)$).

Důkaz

Zjevně platí následující – první výraz je ČRF, má tedy své číslo e, druhá rovnost plyne ze S-m-n věty:

$$\lambda z,x(\varphi_{f(s_1(z,z))}(x)) \simeq \Psi_2(e,z,x) \simeq \varphi_{s_1(e,z)}(x)$$

Dosadíme $z = e$ a dostáváme hledané $a = s_1(e,e)$. Platí totiž $\varphi_{f(s_1(e,e))}(x) \simeq \Psi_2(e,e,x) \simeq \varphi_{s_1(e,e)}(x)$.

Vlastnosti programů a a $f(a)$

Funkce f zobrazuje program na program. Bod a je pevným bodem zobrazení f. Jak vypadají programy a a $f(a)$? Který z nich počítá déle? Uvidíme, že program a počítá déle než $f(a)$.

Co dělá program e na datech (z,x)? Počítá $\varphi_{f(s_1(z,z))}$, tj. vezme z a spočítá neprve $s_1(z,z)$, potom $f(s_1(z,z))$, který ale nemusí konvergovat. Jestliže $f(s_1(z,z))\downarrow$, spustí se na vstup x.

Co dělá program a? Program a vznikne jako $s_1(e,e)$. Mějme na vstupu x. Program a vezme e a přidá ho k x a spustí program e na (e,x). Co udělá program e na těchto datech? Spočítá $s_1(e,e)$ (tedy spočítá a), potom $f(s_1(e,e)) = f(a)$ a spustí program $f(a)$ na x.

Program a tedy neprve spočítá a, potom spočítá $f(a)$ (pokud konverguje) a ten simuluje na vstupu x. Program a je tedy složitější než $f(a)$ a počítá déle.

Poznámka z λkalkulu

V λkalkule sa ekvivalentné tvrdenie ukazuje trošku jednoduchšie. Pre každý λterm F (program F) existuje λterm X taký, že $X = FX$ (program F aplikovaný na X sa rovná X).

Dôkaz je nasledovný

- Majme F, pre ktoré chceme nájsť jeho pevný bod X.
- Nech $W = \lambda x.F(xx)$ (to je funkcia, ktorá x priradí $F(xx)$).
- $X = WW$ (to môžeme chápať ako program/funkciu W aplikovaný na W)
- $X = WW = (\lambda x.F(xx))W = F(WW) = F(X)$ (tretia rovnosť je βpravidlo λkalkulu. Ak si ale $(\lambda x.F(xx))W$ predstavíme ako funkciu, ktorá x priradí $F(xx)$ aplikovanú na W, rovnosť je (snáď) jasnejšia).

Věta (O generování pevných bodů)

Pro každou ORF f existuje prostá rostoucí PRF g taková, že platí:

$$\varphi_{f(g(j))}(x) \simeq \varphi_{g(j)}(x)$$

Tedy g rostoucím způsobem generuje nekonečně mnoho pevných bodů funkce f.

Důkaz

Postupujeme stejně jako v důkazu předchozí věty, jen máme o proměnnou (parametr j funkce g) navíc, tj. platí $\varphi_{f(s_2(z,z,j))}(x) \simeq \Psi_3(e,z,j,x) \simeq \varphi_{s_2(e,z,j)}(x)$. Zvolme $g(j) = s_2(e,e,j)$.

Věta (O rekurzi pro více proměnných)

Nechť f je ČRF $n+1$ proměnných. Potom existuje číslo a takové, že platí $\varphi_a(x_1,\ldots,x_n) \simeq f(a,x_1,\ldots,x_n)$ (tj. a je indexem funkce $\lambda x_1,\ldots,x_n f(a,x_1,\ldots,x_n)$).

Důkaz

$$f(y,x_1,\ldots,x_n) \simeq \Psi_{n+1}(e,y,x_1,\ldots,x_n) \simeq \varphi_{s_1(e,y)}(x_1,\ldots,x_n)$$

Následně aplikujeme větu o rekurzi na $s_1(e,y)$ v proměnné y a dostáváme hledané a (podle VR platí: $\exists a : \varphi_{s_1(e,a)} \simeq \varphi_a$).

Věta (O rekurzi v závislosti na parametrech)

Jestliže f je ČRF $n+1$ proměnných, potom existuje PRF g o n proměnných taková, že platí:

$$\varphi_{f(g(y_1,\ldots,y_n),y_1,\ldots,y_n)}(x) \simeq \varphi_{g(y_1,\ldots,y_n)}(x)$$

Důkaz

Pro $n = 0$ je to totéž jako verze bez parametrů. g nachází pevné body v závislosti na parametrech. Podobně jako v předchozích větách platí: $\varphi_{f(s_{n+1}(z,z,y_1,\ldots,y_n),y_1,\ldots,y_n)}(x) \simeq \Psi_{n+2}(e,z,y_1,\ldots,y_n,x) \simeq \varphi_{s_{n+1}(e,z,y_1,\ldots,y_n)}(x)$. Zvolme $g(y_1,\ldots,y_n) = s_{n+1}(e,e,y_1,\ldots,y_n)$.

1.2 Riceova věta

Věta (Rice)

Jestliže $\mathcal{A}$ je třída ČRF (jedné proměnné), která je netriviální (nejsou to všechny funkce a není prázdná), potom indexová množina $A_{\mathcal{A}} = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ (indexy programů, které vyčíslují funkce z $\mathcal{A}$) je nerekurzivní.

Důkaz

Sporem. Nechť $A_{\mathcal{A}}$ je rekurzivní. Potom lze vytvořit ORF f takovou, že všechny prvky z $A_{\mathcal{A}}$ zobrazí na nějaký prvek $b \notin A_{\mathcal{A}}$ a všechny prvky mimo $A_{\mathcal{A}}$ zobrazí na nějaký prvek $a \in A_{\mathcal{A}}$. Podle věty o rekurzi existuje pevný bod f – u_0, tedy platí:

$$\varphi_{u_0} = \varphi_{f(u_0)}$$

Takže:

$$u_0 \in A_{\mathcal{A}} \Rightarrow f(u_0) = b \notin A_{\mathcal{A}}$$
$$u_0 \notin A_{\mathcal{A}} \Rightarrow f(u_0) = a \in A_{\mathcal{A}}$$

To je ovšem spor, protože u_0 a $f(u_0)$ jsou indexy stejné funkce, a tedy buď obě čísla v $A_{\mathcal{A}}$ leží, nebo obě neleží.

Důsledky

Pozor, nejedná se o třídu programů, ale třídu funkcí. Tedy i pro jednoprvkovou $\mathcal{A}$ bude $A_{\mathcal{A}}$ nekonečná a nerekurzivní (každá funkce je vyčíslovaná nekonečně mnoha programy a rozhodnout o jejich ekvivalenci nelze efektivně).

Proto platí:

- Nechť $\mathcal{A} = \{\varphi_e\}$, potom $A_{\mathcal{A}} = \{x : \varphi_x = \varphi_e\}$ je nerekurzivní.
- Rozhodnout o rovnosti funkcí vyčíslovaných dvěma programy nelze algoritmicky.
