Kombinatorika a grafy I, přednáška Mgr. Martina Mareše, Ph.D.

Poznámky sepsal Robert Husák

Letní semestr 2009/2010

1 Asymptotické odhady funkcí

Chybí 1. přednáška.

Konec 1. přednášky

2 Princip inkluze a exkluze

Příklad 2.1. Kriketový klub... K
Egyptologický klub... E
$|K| = 30$ $|E| = 17$ $|K \cap E| = 5$

$$|K \cup E| = |K| + |E| - |K \cap E| = 42$$

Příklad 2.2. Přidáme klub uživatelů linuxu... L

$$|K \cup E \cup L| = |K| + |E| + |L| - |K \cap E| - |K \cap L| - |E \cap L| + |K \cap L \cap E|$$

Pozorování 2.3. $A_1 ... A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Věta 2.4 (Princip inkluze a exkluze)**.** *$\forall n \in N \forall A_1 ... A_n$:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,...,n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Jinak:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = - \sum_{\{\} \neq I \le \{1,...,n\}} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Důkaz (Počítáním).

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Pro $\forall a \in A$ počítejme, kolikrát přispěje k oběma stranám rovnosti. Přečíslujeme množiny tak, aby $a \in A_i, ..., A_j \& a \notin A_{j+1}, ..., A_n$. Počítáme-li průniky k množin

- $k > j$: 0
- $k \leq j$: $\binom{0}{k}(-1)^{k+1}$

Prvek a přispěje k pravé straně celkem $\binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - ... = 1$. K levé také 1.

Důkaz (Algebraický).

$$\forall x_1...x_n \in R : (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) = \sum_{I \subset \{1,...,n\}} \prod_{i \in I} x_i$$

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) = \sum_{I \subseteq \{1,...,n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$$

Pro $B \subseteq A$ definujeme charakteristickou funkci $f_B : A \to \{0,1\}$, t.ž. $\forall a \in B : a \in A \Leftrightarrow f(a) = 1$

Chybí zbytek důkazu.

Příklad 2.5 (Šatnářka a ti druzí). $\check{s}_n :=$ # permutací π na $\{1, ..., n\}$, t.ž. $\forall i : \pi(i) \neq i$

$$Pr[\text{šatnářka vyhraje}] = \frac{\check{s}(n)}{n!}$$

$$P := \{\pi | \pi \text{má pevný bod}\}, \check{s}(n) = n! - |P|$$

$$P_i := \{\pi | \pi(i) = i\}, P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

$$|Pi| = (n-1)!$$

$$|P_i \cap P_j| = (n-2)!$$

Podle PIE:

$$|P| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}! = .. = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

$$\check{s}_n = n!(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}) = n!(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}) \to \frac{1}{e}$$

(viz [1])

Věta 2.6 (Počet prostých funkcí). ... *Chybí znění věty.*

Věta 2.7 (Počet funkcí na).

$$N = \{f : \{1...n\} \to \{1...m\} | \operatorname{rng} f \neq \{1...m\}\}$$

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} N_i, N_i = \{f | \operatorname{rng} f\}$$

$$|N_i| = (n-1)^n$$

$$|N_i \cap N_j| = (m-2)^n$$

Podle PIE... *Chybí dokončení této věty a Sterlingova čísla.*

Konec 2. přednášky

3 Násobení polynomů

$$\mathrm{P}(x) = p_0x^0 + p_1x^1 + ... + p_nx^n$$

$$\mathrm{Q}(x) = q_0x^0 + q_1x^1 + ... + q_nq^n$$

$$\mathrm{P}(x).\,\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_ix^i.q_jx^j$$

$$[x^k].(\mathrm{P}(x).\,\mathrm{Q}(x)) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m\\ i+j=k}} p_iq_j$$

$$[x^k]\,\mathrm{R}(x)$$

$$[x^k]\,\mathrm{P}(x) = p_k$$

$$i \in \{1,3,7\} = I \to \mathrm{P}(x) = x^1 + x^3 + x^7$$

$$j \in \{2,3,4\} = J \to \mathrm{Q}(x) = x^2 + x^3 + x^4$$

$$[x^k](P.Q) = \#i,j : i \in I, j \in J, i+j = k$$

$$\mathrm{P}(x) := \sum_{i\in I} x^i; \mathrm{Q}(x) := \sum_{j\in J} x^j$$

$$[x^l](P.Q.R) = \sum_{\substack{i,j,k\\ i+j+k=l}} p_iq_jr_k$$

Některé problémy tedy lze převádět na násobení polynomů. Např.: Kolika způsoby můžeme zaplatit 21 Kč, pokud máme k dispozici daný počet mincí různých hodnot.

4 Vytvořující funkce

Definice 4.1. Pro posloupnost $(a_0, a_1, ...)a_i \in \mathbb{R}$ nazveme vytvořující funkcí řadu

$$\mathrm{a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Definice 4.2.

$$0^x = 0; x^0 = 1$$

Tvrzení 4.3. *Buď $(a_0, a_1, ...)$ posloupnost reálných čísel a $K \in \mathbb{R}$ t. ž. $\forall_n^* |a_n| \leq K^n$. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ konverguje na $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ absolutně, tím pádem určuje funkci $a : (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to \mathbb{R}$. Navíc hodnotami fce a na jakémkoliv okolí 0 je posloupnost $(a_0, a_1, ...)$ jednoznačně určena: $a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$.*

Pozorování 4.4.

$$(1,1,1,1,...) \Leftrightarrow x^0 + x^1 + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

$$(a_0, a_1, ...) \Leftrightarrow \mathrm{a}\, x$$

$$(\alpha.a_0, \alpha.a_1, ...) \Leftrightarrow \alpha.\, \mathrm{a}(x)$$

$$(\underbrace{0,0,0}_{k}, a_0, a_1, ...) \Leftrightarrow x^k.\, \mathrm{a}(x)$$

$$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}(x) - \mathrm{a}_0\, x^0 - ... - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$$

$$(\alpha^0 a_0, \alpha^1 a_1, ...) \Leftrightarrow \mathrm{a}(\alpha x)$$

$$(a_0, \underbrace{0,...,0}_{k-1}, a_1, \underbrace{0,...,0}_{k-1}, a_2, ...) \Leftrightarrow \mathrm{a}(x^k)$$

$$(1.a_1, 2.a_2, 3.a_3, ...) \Leftrightarrow [\mathrm{a}(x)]'$$

$$(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, ...) \Leftrightarrow \int_0^x \mathrm{a}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$[x^n](\mathrm{a}(x).\,\mathrm{b}(x)) = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0$$

Chybí některé vztahy.

$$(2^0, 2^1, 2^2, ...) \Leftrightarrow \frac{1}{1-2x}$$

$$\mathrm{a}(x^k) = \underset{0}{\mathrm{a}}(x^k)^0 + \underset{1}{\mathrm{a}}(x^k)^1 + \underset{2}{\mathrm{a}}(x^k)^2 + ...$$

$$(1,0,2,0,4,0,...) \Leftrightarrow \frac{1}{1-2x^2}$$

$$\mathrm{a}(x)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_n n.a_n.x^{n-1}$$

$$(1,2,3,4,5,...) \Leftrightarrow (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Příklad 4.5 (Fibonacciho čísla)**.**

$$F_0 := 0, F_1 := 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$\frac{\mathrm{f}(x) - x}{x^2} = \frac{\mathrm{f}(x)}{x} + \mathrm{f}(x)$$

$$-x = x.\,\mathrm{f}\,x + x^2.\,\mathrm{f}\,x - \mathrm{f}\,x$$

$$\mathrm{f}(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}$$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2}$$

$$\frac{-x}{x^2+x-1} = \frac{\alpha}{1-\lambda_1 x} + \frac{\beta}{1-\lambda_2 x}$$

... (přes parciální zlomky) ...

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = -\beta$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Chybí dokončení příkladu.

Konec 3. přednášky

Definice 4.6.

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)}{k!}$$

pro $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Pozorování 4.7. pro $r \in \mathbb{N}$, $r \geq k$ std. kombinační čísla, pro $r < k ... \binom{r}{k} = 0$

Věta 4.8 (Zobecněná binomická)**.** $\forall r \in \mathbb{R} \forall x \in (-1,1) : (1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$

Důkaz.

$$a_0, a_1, ... \leftrightarrow \mathcal{A}(x)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leftrightarrow \mathcal{B}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{1-x}$$

$$\mathrm{P}(x) = \sum_i p_i x^i, \mathrm{Q}(x) = \sum_j q_j x^j$$

$$[x^n](P.Q)(x) = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + p_2 q_{n-2} + ... + p_1 q_0$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^3 + ...$$

$$[x^n](P.Q) = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n$$

Pozorování 4.9.

$$1, 2, 3, 4, 5, ... \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1, 1+2, 1+2+3, ... \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3}$$

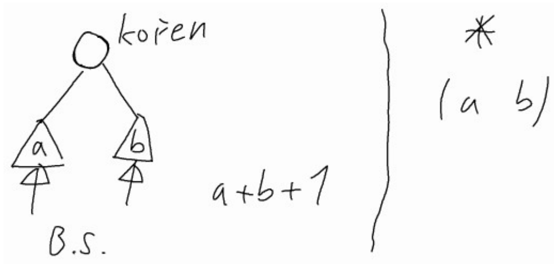
$$1 + 2 + ... + n = [x^{n-1}](1+(-x))^{-3} = ...$$

Chybí dokončení pozorování.

Lemma 4.10. *Pro $a, b \in \mathbb{N}$:*

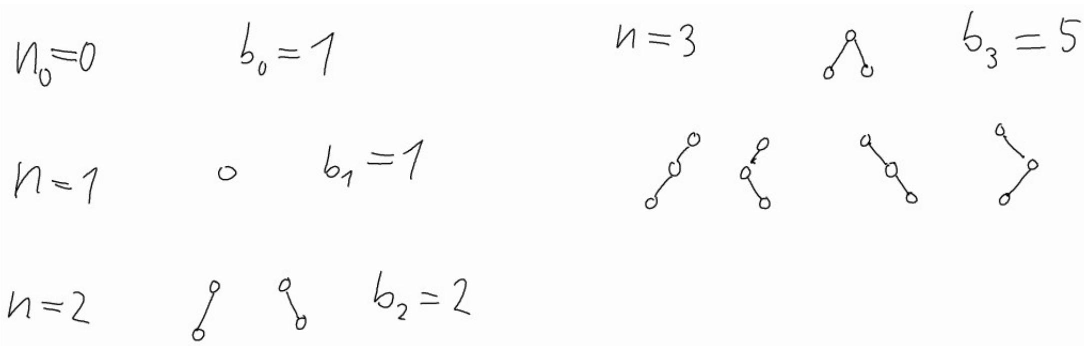
$$\binom{-a}{b} = \frac{(-a)(-a-1)...(-a-b+1)}{b!} = \frac{(-1)^b a(a+1)...(a+b-1)}{b!} =$$

$$= \binom{a+b-1}{b}(-1)^b = \binom{a+b-1}{a-1}(-1)^b$$



Obrázek 1: Jiný způsob vyjádření binárního stromu (tj. jako aritmetický výraz)

Pozorování 4.11. Binární strom s 0 vrcholy je prázdný strom. Neprázdný B.S.: ($b_n :=$ počet binárních stromů na n vrcholech)



Obrázek 2: Počet možných binárních stromů b_n na n vrcholech

$$b_3 = b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0 + 1.2 + 1.1 + 2.1$$

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1}$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i-1}$$

$$[x^n]\frac{\mathcal{B}(x)-1}{x} = [x^n](\mathcal{B}^2(x))\forall n$$

$$\frac{\mathcal{B}(x)-1}{x} = \mathcal{B}^2(x)$$

$$x.\mathcal{B}^2(x) - \mathcal{B}(x) + 1 = 0$$

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

(Řešení s + neplatné)

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{B}^+(x) = +\infty$$

$$b_n = [x^n]\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = [x^{n+1}]\frac{-1}{2}\sqrt{1-4x} = -\frac{1}{2}[x^{n+1}]\sqrt{1-4x} =$$

$$-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1} = (-1)^n\frac{4^{n+1}}{2} = ... =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{n-té Catalanovo číslo}}$$

Věta 4.12. *Mějme lineární rekurenci* $A_{n+k} = c_0A_n + c_1A_{n+1} + ... + c_{k-1}A_{k-1}$ *(*),* $A_0 = a_0, ..., A_{k-1} = a_{k-1}$ *a* $\mathrm{P}(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - ... - c_0x^0$*. Potom:*

1. *Pokud* $\lambda_1...\lambda_k \in \mathbb{C}$ *jsou navzájem různé kořeny polynomu P, pak* $\exists d_1...+_k \in \mathbb{C} : A_n = \sum_{i=1}^k d_i.\lambda_i^n$
2. *Pokud* $\mathrm{P}(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}...(x-\lambda_2)^{k_2}$*, kde* $\lambda_1...\lambda_2 \in \mathbb{C}$ *navzájem různá. Pak* $\exists d_{ij} \in \mathbb{C}$ *:* $A_n = \sum_{i=1}^z \sum_{j=0}^{k_i-1} d_{ij}\binom{n}{j}\lambda_i^n$

Důkaz. Uvažme $V = \{(a_0, a_1, ...)\}$ splňujících (*). V je vektorový prostor:

1. $(0, 0, 0, ...) \in V$
2. $a \in V \Rightarrow \alpha.a \in V$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$

Pokud předepíšeme $a_0...a_kk-1$ libovolně, zbytek posloupnosti je jednoznačně určen. $\Rightarrow \dim V = k$. Kdy je $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, ...) \in V, \alpha \neq 0$?

$$\forall n : \alpha^{n+k} = c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n+1} + ... + c_{k-1}\alpha^{n+k-1} | : \alpha^n$$

$$\alpha^k = c_0\alpha^0 + c_1\alpha^1 + ... + c_{k-1}\alpha^k - 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\alpha) = 0$$

Chybí dokončení důkazu věty.

Věta 4.13 (Vandermandova matice)**.** ... *Chybí znění a důkaz věty.*

Konec 4. přednášky

5 Konečné projektivní roviny

Chybí 5. přednáška.

Konec 5. přednášky

6 Latinské čtverce

Definice 6.1. **Latinský čtverec řádu** n je čtvercová tabulka $n \times n$ vyplněná čísly z $\{1, ..., n\}$ t. ž. v řádcích ani sloupcích se čísla neopakují.

Definice 6.2. Latinské čtverce A, B řádu n jsou **ortogonální** $(A \perp B) \equiv$

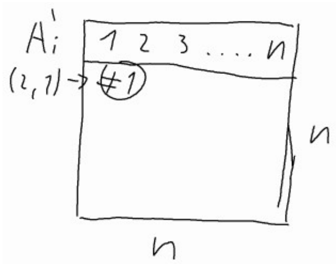
$$\forall (x, y) \in \{1, ..., n\}^2 \exists ! (i, j) \in \{1, ..., n\}^2 : A_{ij} = x \land B_{ij} = y.$$

Lemma 6.3. *Buď π permutace na $\{1, ..., n\}$, A, B latinské čtverce. $\pi(A)$ je též latinský čtverec řádu n $[\pi(A)_{ij} = \pi(A_0)]$, $A \perp B \Leftrightarrow \pi(A) \perp B$.* $\boxed{\textit{Chybí důkaz.}}$

Věta 6.4. *Pokud $A_1, ..., A_k$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu n, pak $k \leq n - 1$.*

Důkaz. $\forall i$ zvolím permutaci π_i tak, aby $A'_i := \pi_i(A_i)$ měl v 1. řádku $1, 2, ..., n$.

1. $\Rightarrow$: $A'_1, ..., A'_k$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce.

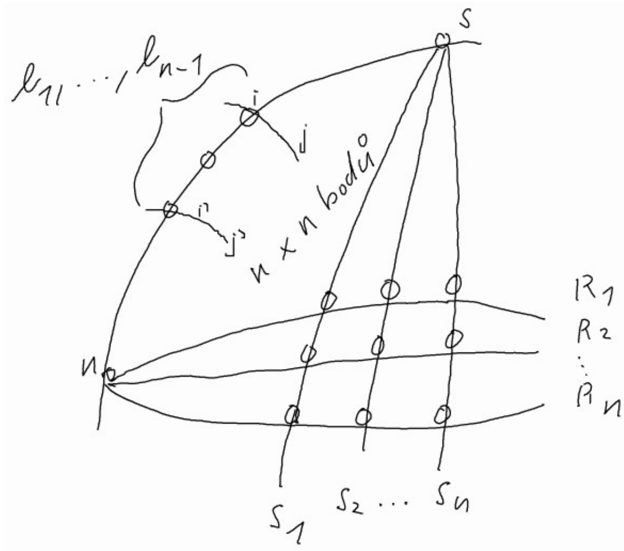


Obrázek 3: Latinský čtverec

$$(A'_i)_{2,1} \neq 1$$
$$(A'_i)_{2,1} \neq (A'_j)_{2,1}$$

2. $\Rightarrow$: $k \leq n - 1$

Věta 6.5 (NOLČ $\rightarrow$ KPR)**.** *$\forall n \geq 2 \exists$ systém $n - 1$ navzájem ortogonálních latinských čtverců (NOLČ) řádu $n \Leftrightarrow \exists$ konečně projektivní rovina (KPR) řádu n.*



Obrázek 4: Konstrukce projektivní roviny z $n-1$ NOLČ

Důkaz (skica)**.** Viz obrázky 4 a 5. Latinské čtverce $A_1, ..., A_{n-1}$, čtverec A_i popíše přímky procházející bodem l_i

1			
			1
		1	
	1		

Obrázek 5: Ukázka možného rozložení 1

na j-té z těchto přímek leží vnitřní body (x, y) t.ž. $(A_i)_{xy} = j$.

7 Množinové systémy

Definice 7.1. Množinový systém je $(X, \mathcal{S})$, kde X je nosná množina, $\mathcal{S} \subseteq 2^x$. = hypergraf. Nebo: $(\underbrace{X}_{\text{nosná množina}}, \underbrace{I}_{\text{množina indexů}}, \underbrace{f}_{f:I \to 2^x})$ Nebo (v konečném případě): $(X, \underbrace{(A_1, ..., A_k)}_{\forall i: A_i \subseteq X})$

Definice 7.2. Incidenční graf množinového systému $(X, \mathcal{S})$ je bipartitní graf $(X, \mathcal{S}, E)$, t.ž. $(\underbrace{x}_{\in X}, \underbrace{M}_{\in S}) \in E \equiv v \in M$.

Definice 7.3. Systém různých reprezentantů pro $(X, \mathcal{S})$ je funkce $r : S \to X$ prostá t.ž. $\forall S \in \mathcal{S} r(S) \in S$.

Věta 7.4. *(Hallova) Množinový systém $(X, \mathcal{S})$ má systém různých reprezentantů $\Leftrightarrow \forall \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$: $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ indukcí podle $|\mathcal{S}|$... pro $|\mathcal{S}| \leq 1$. indukční krok: pokud věta platí pro $|\mathcal{S}| < n$, pak platí i pro $|\mathcal{S}| = n$.

1. Pokud $\forall \mathcal{T} : 0 \neq \mathcal{T} \subset \mathcal{S} : |\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}| + 1$, zvolíme libovolně $Z \in \mathcal{S}, r \in Z$ reprezentant Z a použijeme indukci na $(X - \{r\}, \{A - \{r\} | A \in \mathcal{S}, A \neq Z\}$. Splňuje Hallovu podmínku,

podsystém $\mathcal{J} = \{A_1 - \{r\}, ..., A_k - \{r\}\} \forall i : A_i \in \mathcal{S}$

$$|\bigcup \mathcal{T}| = |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) - \{r\}| \geq |A_1 \cup ... \cup A_k| - 1 \geq k$$

2. $\exists \mathcal{T} : 0 \neq \mathcal{T} \subset \mathcal{S} : |\bigcup \mathcal{T}| = |T||$. Rozdělíme $(X, \mathcal{S})$ na 2 části: $\underbrace{(\bigcup \mathcal{T}, \mathcal{T})}_{\mathcal{A}}$ a $(X - \bigcup \mathcal{T}, \{A - \bigcup \mathcal{T} | A \in \mathcal{S} - \mathcal{T}\})$
   (a) H. p. pro $\mathcal{A}$ platí
   (b) H. p. pro $\mathcal{B}$: pokud $B_1, ..., B_k \in \mathcal{B} ... B_i = A_i - \bigcup \mathcal{T}, A_i \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$

$$|\bigcup \{B_1, ... B_k\}| = |(\bigcup \{A_1, ..., A_k\})| - |\bigcup \mathcal{T}|$$

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i - \bigcup \mathcal{T}$$

$$|\bigcup_i B_i| = \underbrace{|\bigcup A_i \cup \bigcup \mathcal{T}|}_{\geq k + |\mathcal{T}|} - \underbrace{|\bigcup \mathcal{T}|}_{= |\mathcal{T}|} \geq k$$

Konec 6. přednášky

Definice 7.5. **Párování** v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že $\forall e, f \in F, c \neq f : e \cap f = \emptyset$.
Párování je **perfektní**, pokud $\forall v \in V \exists f \in F : v \in f$. Ekvivalentně: když $2|F| = |V|$.
V bipartitním grafu (A, B, E) je párování $F \in E$ **zleva perfektní**, pokud $\forall a \in A \exists f \in F : v \in f$.

Definice 7.6. Okolí vrcholu $\Gamma(v) : \{u \in V; \{u, v\} \in E\}$. Pro $A \subseteq V : \Gamma(A) = \bigcup_{u \in A} \Gamma(u)$.

Věta 7.7 (Hallova věta pro grafy)**.** *Bipartitní graf* $G = (A, B, E)$ *má zleva perfektní párování* $\Leftrightarrow \forall X \subseteq A : |\Gamma(X)| \geq |X|$.

Důsledek 7.8. Bipartitní graf $G = (A, B, E)$ má perfektní párování $\Leftrightarrow \forall X \subseteq |A \cup B| : |\Gamma(x)| \leq |X|$

Důsledek 7.9. Je-li $G = (A, B, E)$ bipartitní graf t.ž. $\forall a \in A, b \in B : \deg a \geq \deg b$, pak v G existuje zleva perfektní párování.

Důkaz. Zvolím $d := \min_{a \in A} \arg a$. Potom jistě $\forall a \in A, b \in B : \deg a \geq d \geq \deg b$. Ověříme Hallovu podmínku: buď $X \subseteq A$, označíme

$$Q := \{\{a, b\} \in E | a \in A, b \in \Gamma(X)\}$$

$$|Q| \geq d|x|$$

$$|Q| \leq d|\Gamma(X)|$$

$$|Q| \leq \#\text{ hran vedoucích z } \Gamma(X) \leq d|\Gamma(X)|$$

$$|\Gamma(x)| \geq |x|$$

Definice 7.10. **Latinský obdélník** velikosti $m \times n$ je obdélníková tabulka vyplněná čísly $[n] = \{1, 2 ... n\}$, v jejímž každém řádku a každém sloupci se žádná dvě čísla neopakují.

Věta 7.11. *Každý latinský obdélník lze doplnit na latinský čtverec*

Důkaz. Pokud $a < n$, rozšíříme na $a + 1$ řádků. Sestrojíme graf:

$$\{i, j\} \in E \equiv \text{v } i\text{-tém sloupci zatím není číslo } j$$

8 Sítě, toky a řezy

Definice 8.1. Síť (G, z, s, C) se skládá z orientovaného grafu G, zdroje $z \in V(G)$, spotřebiče $s \in V(G)$ $(z \neq s)$ a kapacit $C : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$

Definice 8.2. Tok je funkce $f : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ t.ž.:

1. $\forall e \in E(G) : f(e) \leq c(e)$
2. $\forall v \in V(G), v \neq z, s$: (Kirchhofův zákon)

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) - \sum_{(v,u)\in E} f(v, u) = 0$$

Definice 8.3. Velikost toku f je $|f| := -f^{\Delta}(z)$

Tvrzení 8.4. *Každá síť má maximální tok*

Důkaz.

$$\epsilon := \min(c_i - f_i)$$
$$f'_i := f_i + \epsilon$$

Definice 8.5. Cesta (neorientovaná) je posloupnost $v_0e_1v_1e_2v_2$... t.ž. $\forall i : v_i \in V, c_i \in E$, c_i je buď (v_{i-1}, v_i), nebo (v_i, v_{i-1}) proti směru
Rezerva hrany $r(e_i) := C(e_i) - f(e_i)$, je-li po směru
Rezerva cesty $r(P) := \min_{C\in P} r(e)$
Cesta nasycená $r(P) = 0$

Algoritmus 8.6 (FF (Fordův-Fulkersonův) algoritmus)**.** ... *Chybí algoritmus.*

Věta 8.7. *Tok je maximální ⇔ každá cesta je nasycená. Důkaz viz 8.15.*

Důsledek 8.8. Pokud se FF algoritmus (8.6) zastaví, vydá maximální tok.

Pozorování 8.9. ... Chybí znění pozorování.

Konec 7. přednášky

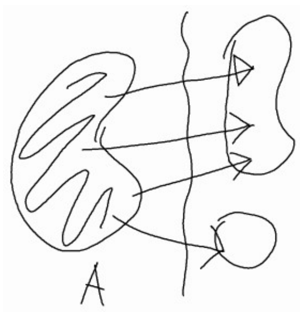
Definice 8.10. Řez je množina hran $F \subseteq E$, t.ž. v grafu $(v, E - F)$ neexistuje orientovaná cesta ze z do s.

Definice 8.11. Pro $B, A \subseteq V$ def. $E(A, B) := \{(u, v) \in E | u \in A, v \in B\}$ pro $g : E \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{g}(A, B) := \sum_{e\in E(A,B)} \mathrm{g}(e)$$

Pro $F \subseteq E$: $\mathrm{g} := \sum_{e\in F} \mathrm{g}(e)$ ... je-li $F \subseteq E$ řez, pak $\mathrm{c}(F)$ kapacitou dřezu.

Definice 8.12. **Elementární řez** je řez tvaru $E(A, \overline{A})$ pro nějakou $A \subseteq V$, t.ž. $z \in A, s \notin A$.



Obrázek 6:

Lemma 8.13. *$forallF$ řez $\exists F' \subseteq F$ elementární řez.*

Důkaz. $A := \{v \in V|$ v grafu $(V, E - F)\exists$ cesta ze z do $v\}$, $z \in A, s \notin A$. $E(A, \overline{A}) \subseteq F$

Lemma 8.14. *Pro $\forall \mathrm{f}$ tok, $\forall R$ elementární řez ($E(A, \overline{A})$) platí:*

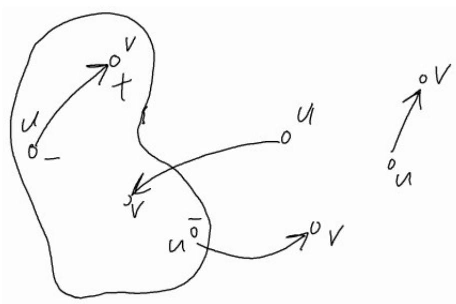
$$|\,\mathrm{f}\,| = \mathrm{f}(A, \overline{A}) - \mathrm{f}(\overline{A}, A)$$

Důkaz. Pro $v \in V$:

$$\underbrace{\sum_{(u,v)\in E} \mathrm{f}(u, v) - \sum_{(v,u)\in E} \mathrm{f}(v, u)}_{\mathrm{f}^{\Delta}(v)} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } v \neq z, s \\ -|\,\mathrm{f}\,| & \text{pro } v = z \end{cases}$$

Sečtením přes všechny $v \in A$ (viz obrázek 7):

$$\sum_{v\in A} \underbrace{f^{\Delta}(v)}_{=\mathrm{f}(\overline{A},A)-\mathrm{f}(A,\overline{A})} = -|\,\mathrm{f}\,|$$



Obrázek 7:

- pokud $u, v \in A$, hrana (u, v) nepřispěje
- pokud $(u, v) \in E(A, \overline{A})$, přidpěje $-$
- pokud $(u, v) \in E(\overline{A}, A)$, přispěje $+$

Důsledek 8.15. Pro $\forall \mathrm{f}$ tok, pro $\forall R$ řez:

$$|\,\mathrm{f}\,| \leq \mathrm{c}(R)$$

Důkaz. Je-li R elementární, $R - E(A, \overline{A})$:

$$|\,\mathrm{f}\,| = \mathrm{f}(A, \overline{A}) - \mathrm{f}(\overline{A}, A) \leq \mathrm{f}(A, \overline{A}) \leq \mathrm{c}(A, \overline{A}) = \mathrm{c}(R)$$

Jinak najdeme $R' \subseteq R$ elementární, $|\,\mathrm{f}\,| \leq \mathrm{c}(R') \leq \mathrm{c}(R)$.
$\Rightarrow$ Pokud $|\,\mathrm{f}\,| = \mathrm{c}(R)$, pak f je maximální, R je minimální.
dukaz[věty 8.7] $A := \{v \in V | \exists$ nenasycená cesta $z \to v\}$

- $z \in A, s \notin A ... E(A, \overline{A})$ je elementární řez
- pro $(u, v) \in E$: $u \in A, v \notin A$, $\mathrm{f}(u, v) = \mathrm{c}(u, v)$
- pokud $u \in \overline{A}$, $v \in A$: $\mathrm{f}(u, v) = 0$

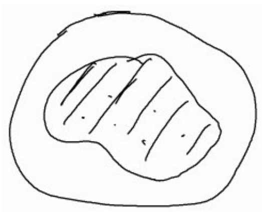
$$|\,\mathrm{f}\,| = \underbrace{\mathrm{f}(A, \overline{A})}_{\mathrm{c}(A,\overline{A})} - \underbrace{\mathrm{f}(\overline{A}, A)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Pokud se F-F algoritmus (viz 8.6) zastaví, vydá maximální tok.

Věta 8.16 (minimaxová)**.** *f tok, R řez:*

$$\max |\,\mathrm{f}\,| = \min \mathrm{c}(R)$$

Důkaz. Buď f maximální tok. Spustíme na f F-F algoritmus (viz 8.6), ten se zastaví a vydá $R : \mathrm{c}(R) = |\,\mathrm{f}\,|$.



Obrázek 8:

Důkaz (Existence maximálního toku)**.** Představíme si f jako funkci v metrickém prostoru dimenze dle počtu vrcholů: $(0, 1)$, $a_n = \frac{1}{n}$, $\mathbb{R}^m$, $m = |E|$, toky... body $\mathbb{R}^m$
$X := \{\mathrm{f} \in \mathbb{R}^m | \mathrm{f}$ je tok $\}$, $|\,\mathrm{f}\,| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá. Omezenost: $X \subseteq \mathrm{X}_{i=1...m} < 0, \mathrm{c}(\mathrm{c}_i) >$
X je uzavřená $\Rightarrow |\,\mathrm{f}\,|$ má na X maximum.

Poznámka 8.17 (Zacyklení F-F algoritmu - 8.6). $a_0 := 1$, $a_1 := r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_{n+2} := a_n - an + 1$, $r^{n+2} = r^n - r^{n+1}$
... vyjde $r^2 = 1 - r$ $\boxed{\text{Chybí zbytek postupu (viz [2]).}}$

- Inicializace: rezervy $(1, r, 0)$
- ...

Konec 8. přednášky

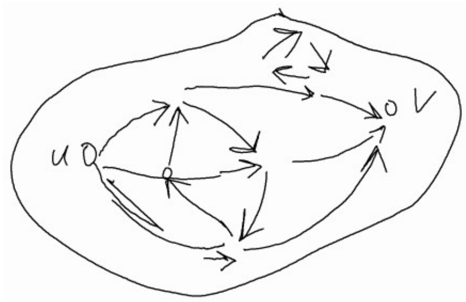
9 Souvislost grafu

Chybí 9. přednáška.

Konec 9. přednášky

Lemma 9.1. *Je-li G orientovaný graf a u, v jeho 2 různé vrcholy, pak* $\min\{|R||R$ *je* u,v*-řez* $\} = \max\{|\,\mathrm{P}\,||\,\mathrm{P}$ *je množina hranově po 2 disjunktních cest z u do v*$\}$.

Důkaz.
- $\min|R| \geq \max|\,\mathrm{P}\,|$ ...dokonce $\forall R \forall \mathrm{P}\, |R| \geq |\,\mathrm{P}\,|$
- $\min|R| \leq \max|\,\mathrm{P}\,|$ ...pokud má G minimální řez R o k hranách, pak $\exists k$ disjunktních cest. $G \to$ síť



Obrázek 9:

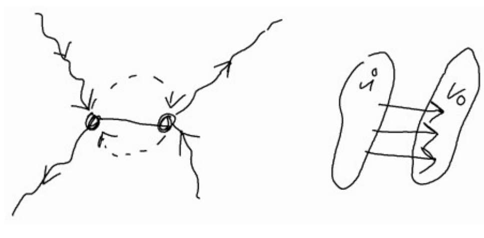
Viz obrázek 9: Zdroj...u, stok...v, $c = 1$, R je minimální řez v síti $\Rightarrow \exists$ tok f velikosti k, a to celočíselný.
Hladově konstruujeme sled z hran s tokem 1:

$$x_0 := z$$

pak po libovolné hraně do x_1, x_2, x_3, ... Zastavíme se, když:

1. Máme cestu - odebereme ji $\to$ tok velikosti $k - 1$
2. Poprvé $x_i = x_j$ pro $j < i$: $x_j, x_{j+1}, ...x_i$ tvoří artikulaci $\to$ odebereme ji

Poznámka 9.2. Pro neorientované grafy (viz obrázek 10):

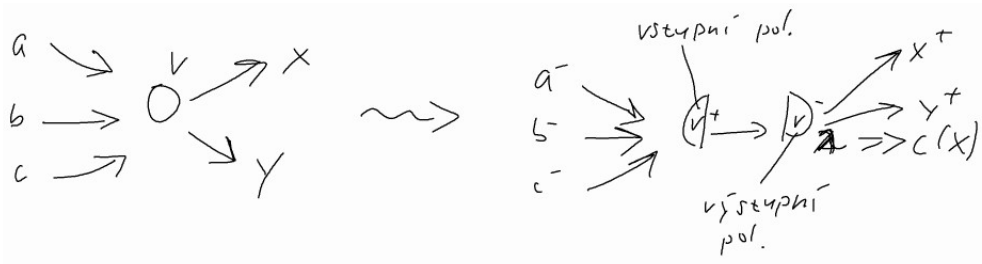


Obrázek 10:

Odstraníme triviální cirkulace, potom použijeme stejný algoritmus jako v předchozím lemmatu.

Věta 9.3 (Ford-Fulkerson). *Pro G neorientovaný graf na $\geq$ vrcholech platí: $\forall k_c(G) \geq \Leftrightarrow$ mezi $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, existuje alespoň k hranově disjunktních cest.*

Důkaz. Pokud máme síť s kapacitami vrcholů $C : V \to \mathbb{R}_0^*$ a $(z, s) \in E$ (viz obrázek 11), převedeme ji takto:



Obrázek 11: Převod ze sítě s kapacitami vrcholů

$$S_v \to S$$

t.ž. tok v $S_v \leftrightarrow$ to v S minimální separátor (BÚNO minimální řez neobsahuje hrany s kapacitou χ_2) v $S_v \to$ minimální řez v S |max. tok| $= C$(minsep)

Lemma 9.4. *Buď G neorientovaný graf, u, v jeho 2 různé vrcholy* ***nespojené hranou****. Potom:*

$$\min\{|s|| s \textit{ separuje } u \textit{ od } v\} = \max\{|\,\mathrm{P}\,||\mathrm{P} \textit{ je množina vnitřně vrcholově disjunktních cest } u \to v\}$$

Věta 9.5 (Menger). *Pro $\forall G$ neorientovaný graf platí:*
$\forall k : k_v(G) \geq k \Leftrightarrow$ mezi $\forall u, v \in V(G), u \neq v \exists$ alespoň k vnitřně vrcholově disjunktních cest

Důkaz. ... $\boxed{\text{Chybí důkaz.}}$

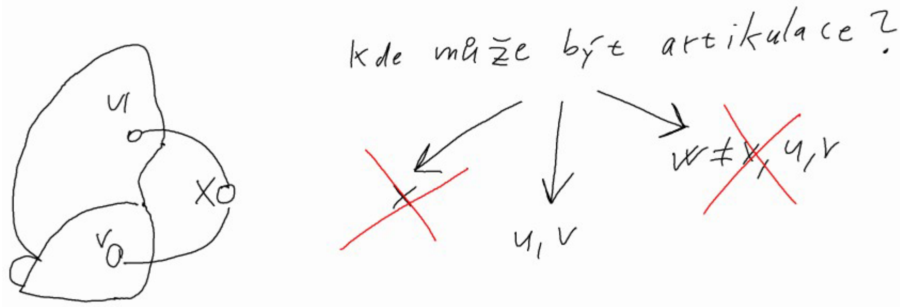
Pozorování 9.6. G je 2-souvislý (vrcholově) $\Leftrightarrow$ G nemá artikulaci (separátor velikosti 1) a $|V(6)| \geq 3$

Pozorování 9.7. G je 2-souvislý $\Leftrightarrow \forall u, v \in V, u \neq v$ leží na společné kružnici

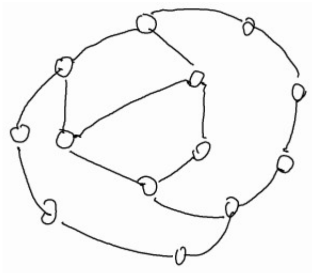
Definice 9.8. Rozdělení hrany ... $\boxed{\text{Chybí znění definice.}}$

Lemma 9.9. *G je 2-souvislý, $e \in E(G)$, pak G s podrozdělenou hranou e je také 2-souvislý.*

Důkaz. Viz obrázek 12 vlevo.



Obrázek 12: Graf vzniklý podrozdělením hrany



Obrázek 13: Ušatá konstrukce

Algoritmus 9.10 ("ušatá konstrukce"). *Viz obrázek 13...* *Chybí znění algoritmu.*

Algoritmus 9.11 ("dělící konstrukce"). ... *Chybí znění algoritmu.*

Věta 9.12 (O syntéze 2-souvislých grafů). *NTJE:*

1. *G je 2-souvislý*
2. *G lze vytvořit z C_k přidáváním uší*
3. *G lze vytvořit z K_3 přidáváním a dělením hran*

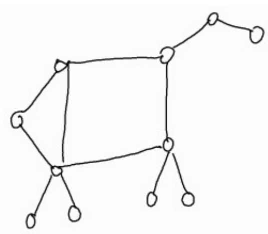
Důkaz. ... Chybí důkaz.

Konec 10. přednášky

10 Skóre grafu

Definice 10.1. Skóre grafu $G = (V, E)$ je posloupnost stupňů vrcholů G uspořádaná vzestupně. Např. skóre grafu na obrázku 14 je:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$$



Obrázek 14: Graf z reálného života

Pozorování 10.2. $(d_1, d_2, ...d_n)$ je skóre grafu (opačná implikace obecně neplatí) $\Rightarrow$:

1. $\sum_{i=1}^{n} d_i$ je sudý
2. $d_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq d_i \leq n - 1$

Pozorování 10.3. Skóre grafu graf obecně jednoznačně neurčuje.

Věta 10.4. *(Havel-Hakimi) Uspořádaná posloupnost celých nezáporných č9sel* $(d_1, d_2, ...d_n)$ *je skóre grafu* $\Leftrightarrow$ *pro* $i = n - d_n$ *je posloupnost* $(d_1, d_2, ..., d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1} - 1, ...d_{i-1} - 1)$ *je skóre grafu (po případném přeuspořádání).*

Důkaz.

- $\Leftarrow$: Ať existuje G' s $V' = \{v_1, ...v_{n-1}\}$, t.ž. $\deg v_1 = d_1$, $\deg v_{i-1} = d_{i-1}$, $\deg v_i = d_i - 1...$

$$G = (V, E), V = V' \cup \{v_n\}$$

$$E = E' \cup \{\{v_i, v_n\}, ...\{v_{n-i}, v_n\}\}$$

  G má skóre $(d_1, d_{i-1}, d_i, ...d_{n-1}, (n-1) - (i-1) = n - i = d_n)$

- $\Rightarrow$:

$$Q = \{G \text{ se skore } (d_1, ...d_n)\} \pm \emptyset$$

  $G_0 \in Q : |N(v_n) \cap \{v_i...v_n - 1\}|$ je maximální
  pokud $|N(v_n) \cap \{v_i...v_n - 1\}| = d_n$, tak $G_0 - v_n$ má skore

$$(d_1, ...d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1} - 1, ...d_{i-1} - 1)\surd$$

  předpokládejme pro spor, že $|N(v_n) \cap \{v_i...v_n - 1\}| < d_n$
  tedy $\exists j \in \{i, ...n-1\}$ a $\{v_j, v_n\} \notin E$ a $\exists k \in \{i, ...n-1\}$ a $\{v_k, v_n\} \in E$, dále $\exists l \in \{i, ...n-1\}$ a $\{v_l, v_n\} \in E$ a $\{v_l, v_k\} \notin E$, jinak $N(v_j) \leq N(v_k)$ a $\deg(v_j) < \deg(v_k) \Rightarrow j < k$, což je spor Chybí dokončení důkazu.

Věta 10.5. $G = (V, E)$, $|V| = n$, $K_3 \not\subseteq G$, *tak* $|E| \leq \frac{n^2}{4}$

Věta 10.6. $G = (V, E)$, $|V| = n$ *a* $C_4 \not\subseteq G$, *tak* $|E| \leq \frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$

Důkaz. Dvěma způsoby spočtu podgraf G izomorfní $K_{1,2}$

1. $p \leq \binom{n}{2}$, protože $\forall u, v$ spojuje ≤ 1 cesta délky 2

2.

Chybí pár bodů důkazu.

$$\sum_{w \in V} \deg w(\deg w - 1) \leq n(n-1) = n^2 - n$$

$$\sum_{w \in V} (\deg w - 1)^2 = \sum_{w \in V} (\deg^2 w - 2 \deg w + 1) \leq \sum_{w \in V} (\deg^2 w - \deg w) + n \leq n^2$$

$$x_w = (\deg w - 1), y_w = 1$$

$$\sum_{w \in V} x_w y_w = \sum_{w \in V} (\deg w - 1)$$

Věta 10.7 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)**.** ... *Chybí znění věty.*

11 Počítání dvěma způsoby

Příklad 11.1. $\mathcal{B}_n = (2^{\{1,2,\dots n\}}, \subseteq)$

$$\omega(\mathcal{B}_n) = n + 1$$

Počet max. řetězců $= |S_n| = n!$, $\alpha(\mathcal{B}_n) = ?$

Věta 11.2. *(Spernerova)* $\alpha(\mathcal{B}_n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Důkaz. $\alpha(\mathcal{B}_n) \geq \binom{n}{k}$, $\mathcal{M}_k = \binom{\{1\dots n\}}{k}$ antiřetězec $\boxed{\text{Chybí důkaz.}}$

Příklad 11.3.

$$K(k_n - e) =?(n \geq 3)$$

p_e = počet koster K_n obsahujících hranu e. Spočtem p = počet dvojic (e, T). kde $e \in E, T$ kostra K_n, $e \in T$

1. $p = \sum_{e \in E(K_n)} p_e = \binom{n}{2} p_e$
2.

$\boxed{\text{Chybí část příkladu.}}$

Konec 11. přednášky

12 Ramseyovy věty

$\boxed{\text{Chybí 12. přednáška.}}$

Konec 12. přednášky

Reference

[1] Matoušek, Nešetril: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum.

[2] Valla, Matoušek: Kombinatorika a grafy I (`http://kam.mff.cuni.cz/~valla/kg.html`)