

# Lineární algebra II, přednáška Mgr. Milana Hladíka, Ph.D.

Poznámky sepsal Robert Husák

Letní semestr 2009/2010

## Obsah

1	Permutace	1
2	Determinant	3
3	Polynomy	7
4	Vlastní čísla	9
5	Positivně definitní matice	18
6	Převod matice do diagonálního tvaru	21
7	QR rozklad	22
8	SVD rozklad	26

## 1 Permutace

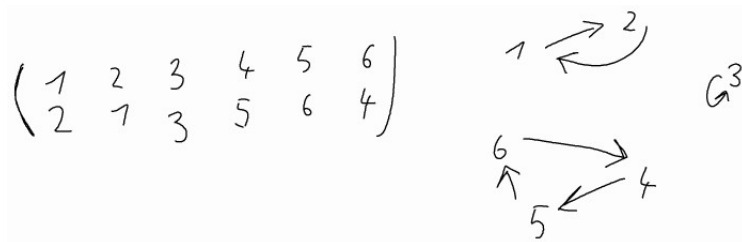
**Definice 1.1.** Permutace je vzájemně jednoznačné zobrazení na množině  $\{1, \dots, n\}$

**Definice 1.2.**  $S_n$  je množina všech permutací na  $\{1, \dots, n\}$

**Definice 1.3.**  $id\ i = i\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

### 1.1 Zadání

- tabulkou
- graficky



Obrázek 1: Tabulkou, graficky

- cyklicky:  $(1, 2)(3)(4, 5, 6)$
- redukovaný cyklicky:  $(1, 2)(4, 5, 6)$

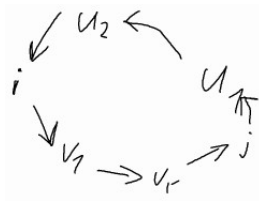
**Definice 1.4.** Inverzní permutace:  $p^{-1} = y \Leftrightarrow p(y) = i$

**Definice 1.5.** Skládání permutací:  $(p \circ q)(i) = q(p(i))$

**Definice 1.6.** Znaménko permutace:  $\text{sgn } p = (-1)^{n-k}$ , kde  $k$  je počet cyklů  $p$

**Věta 1.7.** Nechť  $p \in S_n, t \in S_n$  transpozice,  $t = (i, j)$ , pak  $\text{sgn } p = -\text{sgn } t \circ p$

**Důkaz.** 1.  $i, j$  padnou do jednoho cyklu  $p$



Obrázek 2:  $p_1$

$$t \circ p_1 = (i, u_1, \dots, u_s), (j, v_1, \dots, v_r)$$

2.  $i, j$  v různých cyklech  $p$



Obrázek 3:  $p_1, p_2$

$$t \circ (p_1), (p_2) = (i, v_1, v_2, \dots, v_r, j, u_1, u_2, u_s)$$

**Věta 1.8.**  $\forall$  permutace  $p \in S_n$  lze rozložit na složení transpozic

**Důkaz.** Každý cyklus se rozloží zvlášť:

$$(v_1, v_2, \dots, v_s) = (v_{s-1}, v_s) \circ \dots \circ (v_2, v_3) \circ (v_1, v_2)$$

**Důsledek 1.9.**  $\text{sgn } p = (-1)^r$ , kde  $r$  je počet transpozic v rozkladu  $p$

**Důkaz.**  $p = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_r \circ id$

**Důsledek 1.10.**  $\text{sgn } p \circ q = \text{sgn } p \cdot \text{sgn } q$

**Důkaz.**  $p = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_r, q = t'_1 \circ t'_2 \circ \dots \circ t'_r$

**Důsledek 1.11.**  $\text{sgn } p^{-1} = \text{sgn } p$

**Důkaz.**  $1 = \text{sgn}(id) = \text{sgn}(p \circ p^{-1}) = \text{sgn}(p) \text{sgn}(p^{-1})$

## 2 Determinant

**Definice 2.1.**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , determinant  $A$  je  $\det A = |A| = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)} =$

Obrázek 4: Z definice determinantu

**Příklad 2.2.**  $\det I_n = 1$

**Příklad 2.3.** Horní trojúhelníková matice  $A$ :  $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

**Tvrzení 2.4.**  $\det A^T = \det A$

**Důkaz.**

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^n (A^T)_{ip(i)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^n a_{p(i)i} = \\ &= \sum_{p^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} p^{-1} \prod_{i=1}^n a_{ip^{-1}(i)} = \sum_{q \in S_n} \operatorname{sgn} q \prod_{i=1}^n a_{iq(i)} = \det(A) \end{aligned}$$

**Pozorování 2.5.** Obecně  $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

**Věta 2.6** (Řádková linearita determinantu).  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , pak  $\det(A + e_i \cdot b^T) = \det A + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$

**Důkaz.**

$$\det(A + e_i b^T) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \left( \prod_{i \neq j=1}^n a_{jp(j)} \right) (a_{ip(i)} + b_{p(i)}) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{j=1}^n a_{jp(j)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) b_{p(i)} \prod_{i \neq j=1}^n a_{jp(j)}$$

Jak elementární řádkové úpravy ovlivňují determinant  $A'$  matice po provedení následujících úprav z  $A$ ?

**Věta 2.7.** Vynásobení  $i$ -tého řádku  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $\det A' = \alpha \det A$

**Důkaz.**

$$\det A' = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \alpha \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

**Důsledek 2.8.**  $\det \alpha A = \alpha^n \det A$

**Věta 2.9.** Prohození  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku:  $\det A' = -\det A$

**Důkaz.** V definici determinantu využijeme  $\operatorname{sgn}(t \circ p) = -\operatorname{sgn}(p)$

**Důsledek 2.10.** Pokud  $A$  má 2 stejné řádky, pak  $\det A = 0$

**Důkaz.**  $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

**Pozorování 2.11.** Neplatí pro všechna tělesa

**Věta 2.12.** K  $j$ -tému řádku přičteme  $\alpha$ -násobek  $i$ -tého:  $\det A' = \det A$

**Důkaz.**  $\det(A + \alpha e_j A_{i*}) = \det A + \alpha \det \left( \underbrace{A + e_j(A_{i*} - A_{j*})}_{i\text{-tý a } j\text{-tý řádek jsou v této matici stejné}} \right) = \det A$

Konec 1. přednášky

**Věta 2.13.** (Determinant a regularita) *Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pak  $A$  je regulární  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$*

**Důkaz.**  $A$  regulární  $\Rightarrow$  RREF  $A$  je horní  $\Delta$  matice s nenulovou diagonálou  $\Rightarrow \det A \neq 0$   
 $A$  singulární  $\Rightarrow$  RREF( $A$ ) obsahuje nulový řádek  $\Rightarrow \det A = 0$

**Pozorování 2.14.**  $\det =$  míra regularity?

**Příklad 2.15.** Hilbertova matice  $H_n: \det(H_2) 10^{-1} \dots$

**Příklad 2.16.**  $\det 0, 1, I_n = 10^{-1}$

**Lemma 2.17.** *Bud'  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $E$  - matice elemen. řádkové úpravy. Pak  $\det EB + \det B = \det E \det B + 1$*

**Důkaz.** 1. Vynásobení  $i$ -tého řádku číslem  $\alpha$

2.  $i \leftrightarrow j \det = -1$

3. Přičtení  $\alpha$ -násobku  $i$ . řádku k  $j$ . řádku  $\det = 1$

**Věta 2.18** (Multiplikativnost determinantu). *Bud'  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Pak  $\det AB = \det A \det B$*

**Důkaz.** 1.  $A$  sing.  $\Rightarrow \det A = 0$

$AB$  také sing.  $\Rightarrow \det AB = 0$

2.  $A$  reg.  $A = E_1 E_2 \dots E_k$

$\det AB = \det E_1 (E_2 \dots E_k B) = \det(E_1) \det E_2 \dots E_k B = \dots = \det(E_1 E_2 \dots E_k) \det(B)$

**Příklad 2.19.**  $\det A^k - \det A^k \det A^{-1} = 1 / \det A$

**Věta 2.20** (Laplaceův rozvoj dle  $i$ -tého řádku). *Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, i \in \{1..n\}$ . Pak  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}$  je matice  $A$  bez  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce.*

**Důkaz.** 1. Necht'  $A_{i*} = e_j^T$

$$A \dots i \left( \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c} A_{1*} \\ A_{i+1*} \\ A_{i+2*} \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|c} A^{ij} & \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

Obrázek 5:

$$(-1)^{n-i} (-1)^{n-j} = (-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i-j} \det A = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{in} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{i2} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{in} \end{pmatrix}$$

Obrázek 6:

2.

**Věta 2.21** (Cramerovo pravidlo). *Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reg.,  $b \in \mathbb{R}^n$  Pak  $Ax = b$  má řešení se složkami  $x_i = \frac{\det A + (b - A_{*i})e_i^T}{\det A}$*

**Důkaz.** Bud'  $x$  řešení  $Ax = b$ .

$$\sum_{j=1}^n A_{*j} x_j = b$$

$$\det A + (b - A_{*i})e_i^T = \det A_{*1} A_{*2} \dots A_{*n} = \det \left( \sum_{j=1}^n A_{*j} x_j \right) = \sum_{j=1}^n \det \dots A_{*j} \dots x_j = \det Ax_i$$

**Definice 2.22.**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , adjugovaná matice k  $A$  je  $\text{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{ji}$

**Věta 2.23.**  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot \text{adj}(A) = \det A I_n$

**Poznámka 2.24.**  $A$  reg.  $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$

**Důkaz.**  $(A \cdot \text{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \text{adj}(A)_{kj} = \sum_k A_{ik} (-1)^{k+j} \det A^{jk} =$

1.  $i = j$ : rozvoj  $A$  dle  $j$ -tého řádku =  $\det A$

2.  $i \neq j$ :

$$\det \begin{pmatrix} i & A_{i*} \\ j & A_{j*} \end{pmatrix} = 0 = \text{Lapl. rozvoj dle } j\text{-tého řádku}$$

Obrázek 7:

**Příklad 2.25.**  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  Pak  $A^{-1}$  je celočíselná  $\Leftrightarrow \det A = \pm 1$

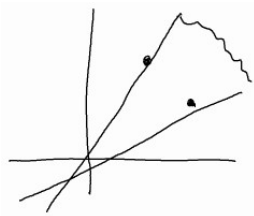
**Důkaz.** 1.  $\Rightarrow$ :  $1 = \det A \det A^{-1}$ , oba činitelé  $\in \mathbb{Z} \Rightarrow \det A = \pm 1$

2.  $\Leftarrow$ :  $A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det A^{ji} \in \mathbb{Z}$

Konec 2. přednášky

## 2.1 Geometrický význam determinantu

**Pozorování 2.26.** Lineární obal... nejmenší VP obsahující  $X \subseteq R^n$



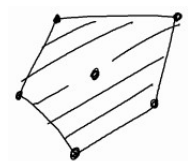
Obrázek 8: Lineární obal

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum a_i x_i, x_i \in X, a_i \in R \right\}$$

**Pozorování 2.27.** Afinní obal... nejmenší translace VP obsahující  $X$

$$A(X) = \left\{ \sum a_i x_i, x_i \in X, a_i \in R, \sum a_i = 1 \right\}$$

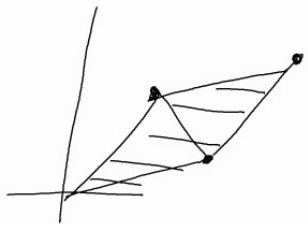
**Pozorování 2.28.** Konvexní obal... nejmenší konvexní množina obsahující  $X$



Obrázek 9: Konvexní obal

$$K(X) = \left\{ \sum a_i x_i, x_i \in X, a_i \in \langle 0, 1 \rangle, \sum a_i = 1 \right\}$$

**Pozorování 2.29.** Rovnoběžnostěn určený vektory z  $X$



Obrázek 10: Rovnoběžnostěn určený vektory z  $X$

$$R(X) = \left\{ \sum a_i x_i, x_i \in X, a_i \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$$

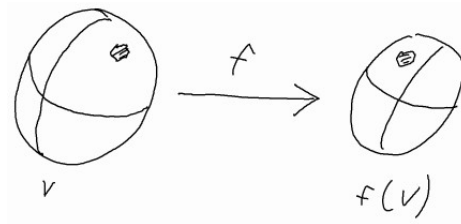
**Pozorování 2.30.** Pro vektory  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  sestavíme matici  $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , poté platí, že objem rovnoběžnostěnu určeného  $x_1, \dots, x_n$  je  $|\det A|$

**Důkaz** (idea). • Směřují-li  $x_1, \dots, x_n$  podél směru souřadnicových os, potom  $R(X)$  je kvádr, jeho objem je součin délek stran =  $\det A$ , protože  $A$  je diagonální.

- Ukážeme, že úpravy, které nemění determinant, nemění ani objem  $R(X)$ .

**Důsledek 2.31.** Je-li  $f$  lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $A = [f]_{YY}$  je matice tohoto zobrazení vůči bázi  $Y$ , potom se objemy těles mění

$$\text{vol } f(v) = |\det A| \cdot \text{vol } v$$



Obrázek 11:

### 3 Polynomy

**Definice 3.1.** Polynomem (neboli též mnohočlenem) stupně  $n$  v proměnné  $x$  nad tělesem  $\mathbb{K}$  rozumíme výraz  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{K}, a_n \neq 0$ . Značíme  $p \in \mathbb{K}(x)$ .

Jednoduchá fakta:

- Mnohočleny lze sčítat, odčítat:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

BÚNO  $n \geq m$  :  $(p + q)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$

- Lze násobit skalárem:

$$\alpha p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha a_i x^i$$

- Násobit mezi sebou:

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{i=0}^{n+m} r_i x^i, \text{ kde } r_i = \sum_{j=\max(0, i-m)}^{\min(i, n)} a_j b_{i-j}$$

- Lze je dělit se zbytkem:  $\exists r, t \in \mathbb{K}(x)$  takové, že stupeň  $t <$  stupeň  $q$  a platí:  $p = r \cdot q + t$ . Konstrukce indukcí:  $p(x) - \frac{a_n}{b_m} q(x) x^{n-m}$  má stupeň ostře menší  $p$  ...polynom  $r$  začíná členem  $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$

**Poznámka 3.2.** Neznámou  $x$  lze volit z tělesa  $K$ , ale i ze složitějších struktur, např.  $\mathbb{K}^{n \times n}$ :  $x \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow p(x) \in K^{n \times n}$

**Pozorování 3.3.** Pro  $p \in R(x)$  platí:  $(\forall x \in R : p(x) = 0) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n = 0$

**Důkaz** (sporem). kdyby  $a_n \neq 0$  zvolíme  $x = 1 + n \cdot \max a_0, \dots, a_n$ , potom  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_n + a_0$

**Věta 3.4** (Malá Fermatova).  $\forall a \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0$  platí, že  $a^{p-1} = 1$

**Důkaz.**  $\mathbb{Z}_p: \{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{1, \dots, p-1\} t \rightarrow at$  bijekce:

$$\prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} ai = a^{p-1} \prod_{i=1}^{p-1} i$$

**Důsledek 3.5.**  $\forall q \in \mathbb{Z}_p(x) \exists r \in \mathbb{Z}_p(x)$  stupeň  $r < p-1$  takový, že  $\forall x \in \mathbb{Z}_p : r(x) = q(x)$

**Pozorování 3.6.** Na  $\mathbb{Z}_p: q(x) = x^p - x$  je  $r$  zbytek z  $q$  po vydělení  $x^p - x$ , ale  $q(x) = 0$  pro  $\forall x \in \mathbb{Z}_p$

**Definice 3.7.** Kořenem polynomu  $p \in K(x)$  je takové  $x \in K$ , že  $p(x) = 0$

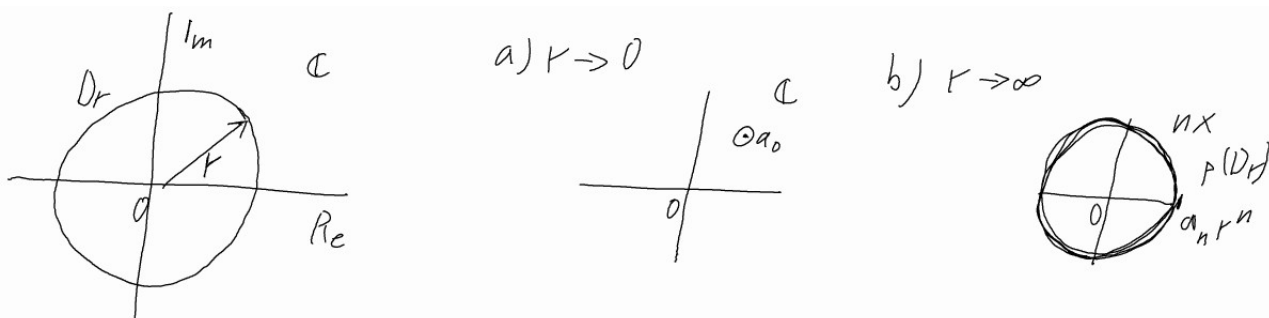
**Příklad 3.8.**  $p(x) = x^2 + 1$

**Věta 3.9.** (Základní věta algebry) Každý mnohočlen stupně alespoň 1 nad  $\mathbb{C}$  má alespoň kořen.

**Důkaz** (idea).

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}(x)$$

Jak vypadá  $p(x)$  aplikovaný na  $\{x : |x| = r\} = D_r \rightarrow$  "Jak vypadá  $p(D_r)$ ?"



Obrázek 12: Důkaz základní věty algebry

**Důsledek 3.10.** Každý takový mnohočlen lze rozložit na součin  $n$  monomů.

**Důkaz.**  $p(x)$  má kořen  $r$ ,  $x - r$  dělí  $p(x)$  beze zbytku  $\rightarrow$  snížíme stupeň a aplikujeme indukci.

Konec 3. přednášky

**Příklad 3.11** (Vandermondova matice (prokládání bodů polynomem)).

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

tedy

$$y_1 = a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1x_1 + a_0$$

$$y_2 = a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_1x_2 + a_0$$



$$\begin{pmatrix} & & \dots & y_n & \\ x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & \\ x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

**Věta 3.12** (Lagrange).

$$p(x) = \sum_{k=1}^n y_k p_k(x) \text{ kde } p_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

...proložení bodů polynomem.

**Důkaz.** Dosadíme  $x_j, j = 1, \dots, n$

$$p(x_j) = \sum_{k=1}^n y_k p_k(x_j) = y_j$$

$$j \neq k : p_k(x_j) = 0$$

$$j = k : p_k(x_j) = 1$$

## 4 Vlastní čísla

**Definice 4.1.** Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $\mathbb{C}^{n \times n}$ ). Pak  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo  $A$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$  je vlastní vektor  $A$ , pokud  $Ax = \lambda x, x \neq 0$ . Vlastní vektor není jednoznačný.

**Věta 4.2** (Charakterizace vlastních čísel).  $\lambda$  je vlastní číslo matice  $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

**Důkaz.**  $\lambda$  je vlastní číslo  $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda Ix = \theta \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = \theta \Leftrightarrow A - \lambda I$  je singulární  $\Leftrightarrow \det A - \lambda I = 0$

**Definice 4.3.** Charakteristický polynom  $A$ :  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

**Definice 4.4.** Spektrum je množina vlastních čísel. Spektrální poloměr:  $\varsigma(A) = \max |\lambda_i|_{i=1 \dots n}$

**Věta 4.5.** (vlastní čísla trojúhelníkové matice)  $A$  je trojúhelníková matice. Potom jsou její vlastní čísla  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

**Důkaz.**  $\det A - \lambda I = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$   
příklad  $I_n$ ... vlastní číslo 1 (vynásobení)

**Věta 4.6.** (součin a součet vlastních čísel)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  vlastní čísla.

1.  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A$

2.  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

**Důkaz.** 1.  $\det A - \lambda I = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n), \lambda = 0 : \det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$

2. koeficient u  $\lambda^{n-1}$  : napravo:

$$(-1)^n(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \dots - \lambda_n) = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

nalevo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \end{pmatrix} > u\lambda^{n-1}$$

**Věta 4.7.** (vlastní čísla reálné matice) Bud'  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  její vlastní číslo. Pak  $\bar{\lambda}$  je také vlastní číslo  $A$ .

**Důkaz.**

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$p_A(\bar{\lambda}) = (-1)^n \bar{\lambda}^n + a_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = 0$$

**Věta 4.8.** (regularita a vlastní čísla matic) matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je regulární  $\Leftrightarrow 0$  není vlastním číslem  $A$ .

**Důkaz.**  $0$  je vlastní číslo  $\Leftrightarrow \det A - 0 \cdot I_n = 0 \Leftrightarrow A$  je singulární

## 4.1 Diagonalizovatelnost

motivace

- $A$  matice lineárního zobrazení  $f : V \rightarrow V$  vzhledem k bázi  $B$
- $S$  matice přechodu od  $B$  k  $B'$
- $\Rightarrow$  matice  $f$  vůči  $B'$  je  $SAS^{-1}$

**Definice 4.9.** Matice  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jsou podobné, pokud  $\exists$  regulární matice  $S$  tak, že  $A = SBS^{-1}$ .

**Definice 4.10.** Matice  $A$  je diagonalizovatelná, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

**Věta 4.11.** Podobné matice mají stejná vlastní čísla

**Důkaz.**  $A = SBS^{-1}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(SBS^{-1} - \lambda S^{-1}S) = \det(S(B - \lambda)S^{-1}) =$$

$$\det S \det(B - \lambda) \det S^{-1} = \det(B - \lambda) = p_B(\lambda)$$

Konec 4. přednášky

**Věta 4.12** (Charakterizace diagonalizovatelnosti matic).  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je diagonalizovatelná  $\Leftrightarrow$  má  $n$  lineárně nezávislých vlastních vektorů

**Důkaz.** 1. ' $\Rightarrow$ ' nechť  $\exists S : S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$   
 $AS = S\Lambda$

$$i\text{-tý sloupeček}(AS)_{*i} = AS_{*i}$$

$$(S\Lambda)_{*i} = S\Lambda_{*i} = S\lambda_i e_i = \lambda_i S_{*i}$$

$S_{*i}$  je vlastní vektor k  $\lambda_i$ ,  $\exists n$  lineárně nezávislých vektorů (sloupce  $S$ )

2. ' $\Leftarrow$ '  $x_1, \dots, x_n$  lineárně nezávislé vlastní vektory. Chceme ověřit  $S^{-1}AS = \Lambda$ ,  $AS = S\Lambda$ :

$$(AS)_{*i} = AS_{*i} = Ax_i = \lambda_i x_i = \lambda_i S_{*i} = \lambda_i S e_i = (S\Lambda)_{*i}$$

kde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Věta 4.13** (Vlastní vektory pro různá vlastní čísla). *Nechť  $A$  má vlastní čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  navzájem různá. Pak odpovídající vlastní vektory  $x_1, \dots, x_n$  jsou lineárně nezávislé.*

**Důkaz.** indukcí

1.  $n = 1$  ... platí

2.  $n \leftarrow n - 1$ :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \Theta$$

$$A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_n Ax_n = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n = \Theta$$

Odečteme od rovnice  $\lambda_n(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \Theta$ :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n)x_n = \Theta$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = \Theta$$

Ty jsou lineárně nezávislé, tedy:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n = \Theta \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 x_1, \dots, \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1} = \Theta$$

Tedy  $\alpha_n \lambda_n x_n = \Theta \Leftrightarrow \alpha_n = \Theta$ .

**Příklad 4.14.**

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$A^2 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

$$A^3 = S\Lambda^3 S^{-1}$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

$$A^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = S \begin{pmatrix} \lambda_1^\infty & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^\infty \end{pmatrix} S^{-1}$$

1. konverguje, pokud  $|\lambda_i| < 1 \forall i$

2. diverguje, pokud  $|\lambda_i| > 1$  pro nějaké  $i$

## 4.2 Symetrické matice

**Poznámka 4.15.** (Matice v  $\mathbb{C}$ )

1. transpozice  $A^T \rightarrow$  hermitovská transpozice  $A^*$ : ( $A_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$ )
2.  $A$  symetrická  $\rightarrow A$  hermitovská:  $A = A^*$
3.  $Q$  ortogonální  $\rightarrow Q$  unitární:  $QQ^* = I$

**Věta 4.16.** (vlastní čísla symetrických matic) *Bud'  $A$  reálná symetrická (komplexní hermitovská) matice. Pak  $A$  má reálná vlastní čísla.*

**Důkaz.** bud'  $\lambda \in \mathbb{C}$  vlastní číslo  $A$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$  vlastní vektor,  $\|x\| = 1 \Rightarrow X^*X = 1$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x / x^* \\ x^* Ax &= \lambda x^* x = \lambda / (\cdot)^* \\ (x^* Ax)^* &= \bar{\lambda} \\ x^* A^* x &= \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Věta 4.17.** (spektrální rozklad symetrických matic) *Bud'  $A$  symetrická reálná matice. Pak  $\exists$  ortogonální  $Q$  a diagonální  $\Lambda : A = Q\Lambda Q^T$ .*

**Poznámka 4.18.** Vlastní vektory symetrických matic jsou ortogonální

**Důkaz.** indukcí podle  $n$

1.  $n = 1$  platí
2.  $n \leftarrow n - 1$ : Bud'  $\lambda$  vlastní čísla  $A$ ,  $x$  vlastní vektor,  $x^T x = 1$ .  $Q = (x|\dots)$  rozšíření na ortogonální matici

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \rightarrow (A - \lambda I)x = \theta \\ Q^T \underbrace{(A - \lambda I)Q}_{(0|\dots)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A'$  je symetrická matice řádu  $n - 1$  Z indukčního předpokladu:  $A' = Q'\Lambda'Q'^T$ ,  $Q'$  ortogonální,  $A'$  diagonální

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Lambda' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q'^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$Q^T(A - \lambda I)Q = R(\dots)R^T$$

$$A - \lambda I = QR(\dots)R^TQ^T$$

$$A = QR(\dots)(QR)^T + \lambda QR(QR)^T$$

$$A = QR \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Lambda' + \lambda I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} (QR)^T$$

Konec 5. přednášky

**Důsledek 4.19.** Asymetrická vlastní čísla  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} x^T A x$$

$$\lambda_n = \min_{\|x\|=1} x^T A x$$

**Důkaz.** 1.  $\geq$ :  $\exists$  vlastní vektor  $\underbrace{x_1}_{\|x_1\|=1} : Ax_1 = \lambda_1 x_1 / x_1^T$

$$x_1^T A x_1 = \lambda_1 x_1^T x_1 = \lambda_1$$

2.  $\leq$ :  $x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1$

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T Q \Lambda Q^T x = (Q^T x)^T \Lambda Q^T x \stackrel{\text{substitute}}{=} y^T \Lambda y = y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_i \lambda_1 y_i^2 = \\ &= \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_1 = \|y\|^2 \\ &\max_{\|x\|=1} x^T A x \leq \lambda_1 \end{aligned}$$

### 4.3 Jordanova normální forma

**Definice 4.20.** Jordanova buňka:  $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}, k \times k, \lambda \in \mathbb{C}$

**Definice 4.21.** Jordanova normální forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}; k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$$

**Věta 4.22** (O Jordanově normální formě). Každá matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je podobná matici mající Jordanovu formu.

**Důkaz.** Nebude, je moc složitý

**Poznámka 4.23.** Počet Jordanových buněk  $J_k(\lambda)$  matice  $A$  je roven  $\text{rank}((A - \lambda I)^{k-1}) - 2 \text{rank}((A - \lambda I)^k) + \text{rank}((A - \lambda I)^{k+1})$ . Navíc Jordanova forma je až na pořadí buněk jednoznačná.

**Věta 4.24** (Oldenburger). Matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \zeta(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

**Důkaz** (idea).

$$\begin{aligned} A &= SJS^{-1} \\ A^2 &= SJS^{-1}SJS^{-1} = SJ^2S^{-1} \\ k \rightarrow \infty : A^k &= SJ^kS^{-1} \rightarrow 0 \\ x_{k+1} &= Ax_k = A^k x_1 \end{aligned}$$

**Důsledek 4.25.**  $\zeta(A) < 1 \Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$

**Důkaz.**

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + \dots &= (I - A \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0)(I - A)^{-1} \quad /k \rightarrow \infty \\ I + A + A^2 + \dots &= (I - A)^{-1} \end{aligned}$$

**Poznámka 4.26.** (Nestabilita Jordanovy normální formy)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \epsilon \neq 0 : A(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \dots JNF je \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Věta 4.27** (Cayley-Hamilton).  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $p_a(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ . Pak  $(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0_{n \times n}$ . Tedy: "Matice je kořenem svého reálného polynomu."

**Důkaz.**

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) \text{adj}(A - \lambda I) &= \det(A - \lambda I) I \\ \text{adj}(A \lambda I) &= \lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0 \end{aligned}$$

Pro určité  $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} (A \lambda I)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0) &= ((-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) I \\ B_{n-1} \lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2}) \lambda^{n-1} + \dots + (AB_1 - B_0) \lambda + AB_0 &= ((-1)^n I \lambda^n + \dots + a_1 I \lambda + a_0 I) \\ \lambda^n : -B_{n-1} &= (-1)^n I \\ \lambda^j : AB_j - B_{j-1} &= a_j I \\ AB_0 &= a_0 I \end{aligned}$$

**Příklad 4.28.**  $A^{-1}$  je lineární kombinace  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$

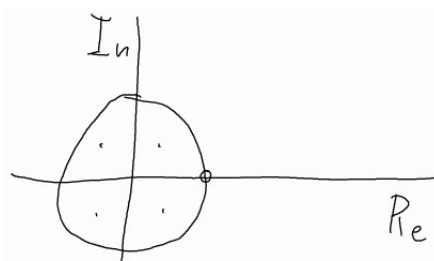
$$\begin{aligned} (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I &= 0 \\ \frac{1}{-a_0} ((-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A) &= I \\ \dots & \end{aligned}$$

## 4.4 Teorie nezáporných matic

(Těž Perron-Frobeniova)

**Věta 4.29.**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Pokud  $A \geq 0$ , pak největší vlastní číslo v absolutní hodnotě je reálné nezáporné a odpovídá mu nezáporný vlastní vektor.



Obrázek 13:

2.  $A > 0 \Rightarrow$  největší vlastní číslo v absolutní hodnotě je reálné kladné a je jediné. Jemu odpovídající vlastní vektor je kladný a je to jediný vlastní vektor s touto vlastností.

**Věta 4.30** (Rayleigh quotient).  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x$  vlastní vektor. Pak  $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$  je vlastní číslo odpovídající  $x$ .

**Důkaz.**  $Ax = \lambda x$

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \lambda x^T x \\ \lambda &= \frac{x^T Ax}{x^T x} \end{aligned}$$

**Poznámka 4.31** (Mocinná metoda). dáno  $0 \in \mathbb{R}$

**while** změna **do**

$$\begin{aligned} x_{i+1} &:= Ax_i \\ x_{i+1} &:= \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|} \\ i &:= i + 1 \end{aligned}$$

**end while**

$$x_i, \frac{x_i^T Ax_i}{x_i^T x_i}$$

**Tvrzení 4.32.** Předpoklady:  $A$  má vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ , vlastní vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n$  lineárně nezávislé,  $x_0$  má nenulovou složkovou souřadnici vůči  $v_1$ . Pak  $x_i$  konverguje k  $v_1$ ,  $\frac{x_i^T Ax_i}{x_i^T x_i}$  konvergují k  $\lambda_1$ .

**Důkaz.**  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$x_1 = Ax_0$$

$$x_2 = Ax_1 = AAx_0 = A^2x_0$$

$$x_i = \frac{A^i x_0}{\|A^i x_0\|}$$

$$x_i = \frac{1}{\|A^i x_0\|} A^i \left( \sum_j d_j v_j \right) = \dots = \frac{\lambda_1^i}{\|A^i \lambda_0\|} \left( \alpha_1 v_1 + \underbrace{\sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i v_j}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0} \right)$$

$$\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| < 1$$

**Věta 4.33** (Companion matrix (Matice společnice)).  $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ,  $C_p$  viz obr. 14

The image shows the Companion matrix  $C_{(P)}$  as a square matrix. The main diagonal consists of 1s, with 0s at the top-left and bottom-right corners. The last column contains the coefficients  $-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}$ . The matrix is enclosed in large parentheses.

Obrázek 14: Companion matrix

Vlastní čísla  $C_{(P)}$  jsou kořeny  $P(x)$

The image shows the derivation of the characteristic polynomial  $P_{C_{(P)}}(\lambda)$ . It starts with the matrix  $P_{C_{(P)}}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & & & -a_0 \\ 1 & -\lambda & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -\lambda & -a_{n-2} \\ & & 1 & -\lambda \\ & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ . The matrix is partitioned into blocks, and the determinant is calculated using the Schur complement. The final result is  $P_{C_{(P)}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & (-a_{n-2} - a_{n-1}\lambda) \\ 0 & & 0 & 1 & (-a_{n-1}\lambda) \end{pmatrix}$ .

Obrázek 15: Část důkazu  $C_p$

**Důkaz.**

$$P_{C_{(P)}} \lambda = \text{viz obr. 15} = (-1)^{1+n} (-P(x)) \det I_{n-1} = (-1)^n P(x)$$

**Věta 4.34.**  $A$  symetrická,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vlastní čísla,  $v_1, \dots, v_n$  odpovídající vlastní vektory ( $v_i \perp v_j \forall i \neq j$ )  $\|v_i\| = 1$ .  $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$  má vlastní čísla  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , k tomu odpovídající vlastní vektory  $v_1, \dots, v_n$



**Důkaz.**  $v_1 : Bv_1 = (A - \lambda_1 v_1 v_1^T)v_1 = Av_1 - \lambda_1 v_1 v_1^T v_1 = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0$

$$v_i, i \neq 1 : Bv_i = (A - \lambda_1 v_1 v_1^T)v_i = Av_i - \lambda_1 v_1 (v_1^T v_i) = \lambda_i v_i$$

**Tvrzení 4.35.**  $A$ , vlastní číslo  $\lambda$ , vlastní vektor  $v$ .

1.  $\alpha A$ : vlastní číslo  $\alpha\lambda$ , vlastní vektor  $v$
2.  $A^2$ : vlastní číslo  $\lambda^2$ , vlastní vektor  $v$
3.  $A^{-1}$ : vlastní číslo  $\lambda^{-1}$ , vlastní vektor  $v$
4.  $A^T$ : vlastní číslo  $\lambda$ , vlastní vektor neznámý

**Důkaz.** 1.  $(\alpha A)v = \alpha(Av) = \alpha\lambda v$

2.  $Av = \lambda v$

$$A^2 v = \lambda Av = \lambda \lambda v$$

3.  $Av = \lambda v$

$$Iv = \lambda A^{-1}v$$

$$\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

4.  $\det A - \lambda I = 0$

$$\det A^T - \lambda I = 0$$

Konec 7. přednášky

## 4.5 Gerschgorinovy disky

**Věta 4.36.**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , necht  $\lambda$  je vlastní číslo  $A$ . Pak  $\lambda$  leží v kruhu o středu  $a_{ii}$  a poloměru  $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  pro nějaké  $i \in \{1, \dots, n\}$ , viz [2]

**Důkaz.**  $\lambda \dots$  vlastní vektor  $x \neq \theta$

$$k = \arg \max_{j=1..n} |x_j|$$

$$(x_k = \max_j |x_j|)$$

$Ax = \lambda x$ , k-tá rovnost

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = Ak * x = \lambda x_k$$

$$\lambda = \sum_{j=1/j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} + a_{kk}$$

$$|\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

**Důsledek 4.37.**  $|\lambda| \leq \max_{k=1..n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$

**Příklad 4.38.** Postačující podmínka pro regularitu  $A$ :  $\forall i = 1..n : |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  (diagonálně dominantní), pak  $A$  je regulární. (0 není v žádném disku)

## 5 Positivně definitní matice

**Definice 5.1.** Symetrická matice  $A$  je pozitivně definitní, pokud  $x^T Ax > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta$

**Definice 5.2.** Symetrická matice  $A$  je pozitivně semidefinitní, pokud  $x^T Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

**Poznámka 5.3.** Pokud je  $A$  pozitivně definitní, je  $A$  pozitivně semidefinitní

**Příklad 5.4.**  $0_n \dots$  pozitivně semidefinitní,  
 $I_n \dots$  pozitivně definitní,  
 $x^T Ix = x^T x < \|x\|_2^2$

**Věta 5.5.** (Operace s pozitivně definitními maticemi)

1.  $A, B$  pos. def.  $\Rightarrow A + B$  také
2.  $\alpha > 0, A$  pos. def.  $\Rightarrow \alpha A$  je pos. def.
3.  $A$  je pos. def.  $\Rightarrow A^{-1}$  také

**Důkaz.** 1.  $x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0 \forall x \neq \theta$

$$2. x^T(\alpha A)x = \alpha(x^T Ax) > 0 \forall x \neq \theta$$

$$3. (a) Ax = 0 \Rightarrow x^T Ax = 0 \Rightarrow x = \theta$$

$$(b) x \neq \theta \Rightarrow x^T A^{-1}x = \underbrace{(x^T A^{-1})}_{y^T} A \underbrace{(A^{-1}x)}_{y \neq 0} = y^T Ay > 0$$

**Poznámka 5.6.**  $A$  ne nutně symetrická:

$$x^T \left( \frac{A + A^T}{2} \right) x = \frac{1}{2} x^T Ax + \frac{1}{2} x^T A^T x = x^T Ax$$

**Věta 5.7.** (charakterizace pos. def.) Následující tvrzení jsou pro  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symetrickou matici ekvivalentní:

1.  $A$  je pos. def.
2.  $A$  má kladná vlastní čísla
3.  $\exists U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  s lineární nezávislými sloupci tak, že  $A = U^T U$

**Důkaz.** 1.  $1 \Rightarrow 2$ :  $\lambda$  vlastní číslo,  $x$  vlastní vektor

$$Ax = \lambda x$$

$$x^T Ax = \lambda x^T x$$

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

2.  $2 \Rightarrow 3$ : spektrální rozklad ( $Q$  ortog.,  $\Lambda'$  má na diagonále druhé odmocniny  $\lambda_i$ )  $A = Q \Lambda Q^T = \underbrace{Q \Lambda'}_{U^T} \underbrace{\Lambda'^T Q^T}_{U}, U \dots$  regulární

3.  $3 \Rightarrow 1$ :  $x \neq \theta$

$$x^T Ax = (x^T U^T)(Ux) = (Ux)^T Ux = \|Ux\|^2 > 0$$

**Věta 5.8** (rekurentní vzoreček na pos. def.).  $A$  sym. řádu  $n$ ,  $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & B \end{pmatrix}$   $A$  je pos. def.  
 $\Leftrightarrow \alpha > 0 \wedge B - \frac{1}{\alpha}aa^T$  je pos. def.

**Důkaz.** •  $\Leftarrow$ : buď  $x \neq \theta$ ,  $x = \begin{pmatrix} \beta \\ y \end{pmatrix}$

$$x^T Ax = (\beta | y^T) \left( \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & B \end{array} \right) \begin{pmatrix} \beta \\ y \end{pmatrix} = \dots = \alpha\beta^2 + \beta a^T y + y^T \beta a + y^T B y = \dots = (\dots)2 + y^T (B - \frac{1}{\alpha}aa^T)y \geq 0$$

Nula, když  $y = \theta$ ,  $\beta = 0$

•  $\Rightarrow$ :  $x^T Ax$

$$\alpha = e_1^T A e_1 > 0$$

$$y \in \mathbb{R}^{n-1}, y \neq 0$$

$$y^T (B - \frac{1}{\alpha}aa^T)y = y^T B y - \frac{1}{\alpha}y^T aa^T y = (\dots)(\dots)(\dots) > 0$$

$$y \neq \theta \Rightarrow x \neq \theta$$

Konec 8. přednášky

## 5.1 Choleského rozklad

**Věta 5.9** (Choleského rozklad). Symetrická matice  $A$  řádu  $n$  je pozitivně definitní právě tehdy, když se dá rozložit na  $A = LL^T$ , kde  $L$  je čtvercová dolní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou. Navíc  $L$  je určena jednoznačně.

**Důkaz.** ( $\Rightarrow$ : Indukcí)

•  $n = 1$ :  $a_{11} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{11}}$ ,  $L = (\sqrt{a_{11}})$

•  $n \leftarrow n - 1$ :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & B \end{pmatrix} \text{ je pozitivně definitní} \rightarrow \alpha > 0, B - \frac{1}{\alpha}aa^T \text{ je pozitivně definitní}$$

podle indukčního předpokladu:  $B - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$ , kde  $\tilde{L}$  je dolní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & B \end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix} \beta & o \\ b & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & b \\ o & \tilde{L}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 | \beta b^T \\ \beta b | b b^T + \tilde{L}\tilde{L}^T \end{pmatrix}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha}$$

$$b = \frac{1}{\beta}a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$$

$$B \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}aa^T + \tilde{L}\tilde{L}^T$$

$$B \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}aa^T + \tilde{L}\tilde{L}^T$$

$$B - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

⇐: Víme:  $L$  je regulární...  $LL^T$  je pozitivně definitní

Důkaz jednoznačnosti:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \Theta \\ b_1 & \tilde{L}_1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & \Theta \\ b_2 & \tilde{L}_2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 L_1^T = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1 b_1^T \\ \beta_1 b_1 & b_1 b_1^T + \tilde{L}_1 \tilde{L}_1^T \end{pmatrix}$$

$$L_2 L_2^T = \begin{pmatrix} \beta_2^2 & \beta_2 b_2^T \\ \beta_2 b_2 & b_2 b_2^T + \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^T \end{pmatrix}$$

$$\beta_1^2 = \beta_2^2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$b_1 b_1^T + \tilde{L}_1 \tilde{L}_1^T = b_2 b_2^T + \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^T = B$$

$$\tilde{L}_1 \tilde{L}_1^T = \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^T = B - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a a^T$$

$$\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2 - \text{spor}$$

**Algoritmus 5.10** (Choleského rozklad).  $L = O_{n \times n}$

**for**  $k = 1$  **to**  $n$  **do**

$$\alpha = a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2$$

**if**  $\alpha \leq 0$  **then**

*A není pozitivně definitní, konec*

**else**

$$l_{kk} = \sqrt{\alpha}$$

$$\forall i = k+1 \dots n : l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj})$$

**end if**

**end for**

## 5.2 Pozitivně definitní matice a skalární součin v $\mathbb{R}^n$

**Věta 5.11.** (Pozitivně definitní matice a skalární součin)  $\langle x, y \rangle$  je skalární součin na  $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = x^T A y$  pro určitou pozitivně definitní matici  $A$

**Důkaz.** ⇐:

1.  $\langle x, y \rangle = x^T A x \geq 0$  a rovnost jen pro  $x = \theta$

2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$   
 $\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x)^T A y = \alpha (x^T A y) = \alpha \langle x, y \rangle$

3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$   
 $\langle x + y, z \rangle = (x + y)^T A z = x^T A z + y^T A z$

4.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$   
 $(x^T A y)^T = y^T A x$

⇒:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$$

Definujeme:  $a_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$  symetrická

$$\sum_i \sum_j x_i y_j a_{ij} = x^T A y$$

$A$  je pozitivně definitní.  $x^T A x = \langle x, x \rangle \geq 0$  a rovnost jen pro  $x = \theta$

**Poznámka 5.12.**

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|x\|_A := \sqrt{x^T A x}$$

**Věta 5.13.** (Odmocnina z matice) Pro každou pozitivně semidefinivní matici  $A \exists$  pozitivně semidefinitní  $B : B^2 = A$

**Důkaz.** Spektrální rozklad:  $A = Q \Lambda Q^T$ ,  $Q$  ortogonální.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1 \dots \lambda_n \geq 0$$

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{Q \Lambda' Q^T}{B^2} = Q \Lambda' Q^T Q \Lambda' Q^T = Q \Lambda'^2 Q^T = Q \Lambda Q^T = A$$

$B$  pozitivně semidefinitní.

Konec 9. přednášky

### 5.3 Kvadratické formy

Chybí 10. přednáška.

Konec 10. přednášky

## 6 Převod matice do diagonálního tvaru

Spektrální rozklad:  $A = Q \Lambda Q^T$

Je-li  $SAS^T$  diagonální, tak počet kladných (záporných, nulových) diagonálních hodnot = počtu kladných (záporných, nulových) vlastních čísel  $A$ .

Jak diagonalizovat?

$$E_k \dots E_1 \cdot A \cdot E_1^T \dots E_k^T \Rightarrow \text{Pomocí gaussovy eliminace}$$

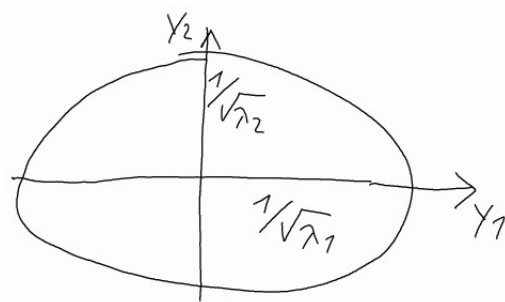
**Příklad 6.1.** Elipsoidy:  $x^T A x = 1$ ,  $A$   $n \times n$  pozitivně definitní.

$$A = Q \Lambda Q^T$$

$$\underbrace{x^T Q \Lambda Q^T x}_{=y} = 1$$

$$y^T \Lambda y = 1$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = 1$$



Obrázek 16: Elipsa

poloosy:  $e_1 \dots e_n$   
 délky:  $1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}$   
 zpět k  $x$ :  $x = Qy$ : elipsoid:

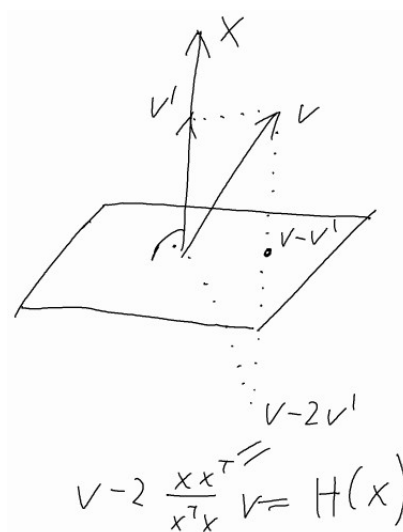
- poloosy:  $e_i > Qe_i = Q_{*i} = i$ -té vlastní vektor  $A$
- délky:  $1/\sqrt{\lambda_i}$

**Příklad 6.2.** Kvadriky:  $x^T Ax + Bx + c = 0$  (pro  $n = 2$  jsou to kuželosečky)

## 7 QR rozklad

### 7.1 Householderova transformace

**Definice 7.1.** Buď  $x \neq \theta$ , Householderova matice je  $H(x) = I - 2 \frac{xx^T}{x^T x}$



Obrázek 17: Householderova matice

**Tvrzení 7.2.**  $H(x)$  je symetrická a ortogonální

**Důkaz.** • symetrická: součet symetrických

• ortogonální:

$$I^2 H(x)^T H(x) = H(x)^2 = \left(I - 2 \frac{xx^T}{x^T x}\right)^2 = I - 4 \frac{xx^T}{x^T x} + 4 \frac{1}{(x^T x)^2} x \underbrace{x^T x}_{\text{skalár}} x^T = \dots = I$$

**Věta 7.3.** (použití  $H(x)$ ) Mějme  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \|y\|$ , pak  $y = H(y - x)x$ .

**Důkaz.**

$$H(y - x)x = \left(I - 2 \frac{(y - x)(y - x)^T}{(y - x)^T (y - x)}\right)x = x - 2 \frac{(y - x)^T x}{(y - x)^T (y - x)} (y - x) = \dots = y$$

**Důsledek 7.4.** Buď  $x \in \mathbb{R}^n$  a definujme:

$$H = \begin{cases} H(x - \|x\|e_1) & \text{pokud } x - \|x\|e_1 \neq \theta \\ I & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak  $Hx = \|x\|e_1$

**Důkaz.** 1.  $x = \|x\|e_1 \dots H = I$

$$Hx = Ix = x = \|x\|e_1$$

2.  $x \neq \|x\|e_1$ , dle věty:

$$H(x - \|x\|e_1) = H(-x + \underbrace{\|x\|e_1}_y)$$

$$y = H(y - x)x$$

$$\|x\|e_1 = H(\|x\|e_1 - x)x$$

**Poznámka 7.5.**

$$A = (a|A')$$

$$H.a = \|a\|e_1$$

$$H.A = \left( \begin{array}{c|c} \geq 0 & \\ \hline 0 & \tilde{A} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

**Věta 7.6** (QR rozklad). Buď  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Pak  $\exists$  ortogonální  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a horní trojúhelníková  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , která má na diagonále nezáporná čísla tak, že  $A = QR$ .

**Důkaz.** Indukcí dle  $n$ :

1.  $n = 1$ :  $A = (a)$

Pak  $\exists$  Householderova matice  $H$ :  $HA = Ha = \|a\|e_1 = \begin{pmatrix} \|a\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Tedy  $A = H^T R$ .

2.  $n \leftarrow n - 1$ :  $a = A_{*1}$

Pak  $\exists$  Householderova matice  $H_1$  :

$$\|a\|e_1 = H_1 a = H_1 A_{*1} = (H_1 A)_{*1}$$

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \|a\| & b^T \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$A' \dots (m-1) \times (n-1)$ , podle indukce  $\exists$  rozklad

$$A' = Q' R' / Q'^T$$

kde  $Q'$  ortogonální řádu  $m-1$ ,  $R'$  je  $(m-1) \times (n-1)$  horní trojúhelníková s nezápornou diagonálou.

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q'^T \end{pmatrix} H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|a\| & b^T \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\| & b^T \\ \mathbf{0} & Q'^T A' \end{pmatrix} = R$$

A tedy:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q'^T \end{pmatrix} H_1$$

Konec 11. přednášky

**Algoritmus 7.7** (QR rozklad). (viz prezentace[2])

**Věta 7.8** (Jednoznačnost QR rozkladu).  $A$  je regulární  $\Rightarrow$  QR rozklad je jednoznačný a  $R$  má na diagonále kladné hodnoty.

**Důkaz.** 1.  $A = QR \Rightarrow R$  je regulární  $\Rightarrow$  diagonála  $> 0$

2. sporem

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2 / Q_2^T \text{ zleva, } R_1^{-1} \text{ zprava}$$

$$U = \underbrace{Q_2^T Q_1}_{\text{ortogonální}} = R_2 R_1^{-1}$$

$U$  je ortogonální a horní trojúhelníková s kladnou diagonálou

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{0} & 0 & & \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 18:

$$I = Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}$$

Tedy  $Q_1 = Q_2$ ,  $R_1 = R_2 \Rightarrow$  spor.



## 7.2 QR a soustavy rovnic

$Ax = b$ ,  $A$  regulární

$$A = QR : QRx = b/Q^T$$

$$Rx = Q^T b$$

Řešení zpětnou substitucí. Oproti GE spotřebuje zhruba  $2x$  více aritmetických operací, je však stabilnější.

## 7.3 QR a metoda nejmenších čtverců

$Ax = L$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$x = (A^T A)^{-1} A^T b$ ,  $A$  má lineárně nezávislé sloupce pomocí QR:

$$A = QR = (Q_1 Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1$$

$R_1$  je regulární,  $Q_1 \dots$  prvních  $n$  sloupců  $Q$

$$(A^T A)^{-1} A^T b = \dots = R_1^{-1} Q_1^T b$$

$x$  je řešením  $R_1 x = Q_1^T b$

$$\left( \begin{array}{c|c} \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obrázek 19:

## 7.4 QR a projekce

$A \dots$  lineárně nezávislých sloupců

projekce  $x$  do  $S(A)$  je  $x = A(A^T A)^{-1} A^T x$

přes QR rozklad:

$$A = QR = Q_1 R_1$$

$$x' = Q_1 R_1 R_1^{-1} Q_1^T x = Q_1 Q_1^T x$$

## 7.5 QR a ortogonalizace

$A$  má lineárně nezávislé sloupce. Chceme ortogonalizovat sloupce  $A$ ,  $A = Q_1 R_1$ .  $S(A) = S(Q_1)$ , sloupce  $Q$  tvoří ortonormální bázi  $S(A)$

## 7.6 QR a vlastní čísla

**Algoritmus 7.9** (QR algoritmus).  $A_{0i} := A$   
*k-tá iterace:*

- QR rozklad  $A_k = Q_k R_k$
- $A_{k+1} = R_k Q_k$
- $k++$

**Věta 7.10.** V *k-tém kroku QR algoritmu (viz 7.9)* má matice  $A_k$  stejná vlastní čísla jako  $A$

**Důkaz.**

$$A_{k+1} = Q_k^T \underbrace{Q_k R_k Q_k}_{A_k} = Q_k^T A_k Q_k$$

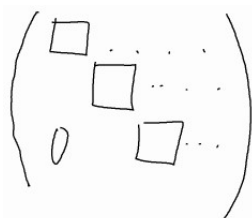
$A_{k+1}$ ,  $A_k$  jsou podobné, tedy mají stejná vlastní čísla

- skoro vždy konverguje k matici horní trojúhelníkové



Obrázek 20: Horní trojúhelníková matice

- komplexní vlastní čísla



Obrázek 21: Téměř horní trojúhelníková matice

## 8 SVD rozklad

(singular value decomposition)

**Věta 8.1** (SVD rozklad).  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Pak existuje ortogonální  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tvaru:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

(singulární čísla  $A$ , určeny jednoznačně) tak, že  $A = X\Sigma Y^T$

**Důkaz.** Je složitý, s úskalími, u zkoušky nebude.

**Algoritmus 8.2** (Výpočet SVD). *Spektrální rozklad  $AA^T = X\Lambda X^T$ ,  $X$  ortogonální, v  $\Lambda$  vlastní čísla řazena sestupně.*

*Spektrální rozklad  $A^T A = Y\Lambda' Y^T$ ,  $Y$  ortogonální, v  $\Lambda'$  vlastní čísla řazena sestupně. Pak SVD rozklad je  $A = X\Sigma Y^T$  a  $\Sigma$  je sestavená z odmocnin vlastních čísel.*

**Důkaz.**

$$A = X\Sigma Y^T$$

$$AA^T = X\Sigma \underbrace{Y^T Y}_I \Sigma^T X^T = X\Sigma \Sigma^T X^T = X$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Pro  $Y$  analogicky.

**Poznámka 8.3.**

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\sigma_i(A^T A)} = \sqrt{\sigma_i(AA^T)}$$

speciálně  $A$  symetrická:

$$\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$$

Chybí zbytek poznámky.

Konec 12. přednášky

## 8.1 SVD a numerický rank

$$A = X \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

$$\text{rank}(A) = r$$

$\epsilon > 0 \dots \sigma_1, \dots, \sigma_s \geq \epsilon, \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_r < \epsilon$ , numerický rank je  $s$   
 $\epsilon = \min(m, n)\sigma_1 \dots$  přesnost aritmetiky

## 8.2 SVD a pseudoinverze (Moore-Penrose)

$$A = X \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

$A \dots m \times n$ , pseudoinverze:

$$A^+ = Y \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r^{-1} \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma^*} X^T$$

$\Sigma^*$  (moje označení, abych ji níže nemusel opisovat..)

**Věta 8.4** (Vlastnosti pseudoinverze). 1.  $A \text{ reg} \Rightarrow A^+ = A^{-1}$

2.  $(A^+)^+ = A$

3.  $AA^+A = A$

4.  $A^+AA^+ = A^+$

5.  $(A^+A)^T = A^+A$

6.  $(AA^+)^T = AA^+$

...ale obecně  $AA^+ \neq A^+A$ ,  $(AB)^+ \neq B^+A^+$

**Důkaz.** 1.  $A \text{ reg}$ :  $A = X\Sigma Y^T$

2.  $AA^+ = X \underbrace{\Sigma Y^T Y \Sigma^*}_I X^T = I \Rightarrow A^T = A^{-1}$

3.  $AA^+A = X\Sigma Y^T Y \Sigma^* X^T X \Sigma Y^T = X\Sigma Y^T = A$

### 8.3 SVD a komprese obrazu

$A$ ,  $a_{ij}$  = stupeň šedi

$$A = X \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

$X_k, Y_k$  ...prvních  $k$  sloupců  $X, Y$

$$(X_r X_r') \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_r^T \\ Y_r'^T \end{pmatrix} = (X_r X_r') \begin{pmatrix} S Y_r^T \\ 0 \end{pmatrix} = x_r S Y_r$$

v SVD rozkladu máme:  $mr + nr + r = (m + n + 1)r$ , komprese

$$A' = X_k \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_k \end{pmatrix} Y_k^T$$

$k \leq r$ ,  $k = r - n$

komprimována:

$$\frac{(m + n - 1)k}{(m + n - 1)r} = \frac{k}{r}$$

## 8.4 SVD a geometrie lineárního zobrazení

$$y = Ax, A \text{ reg}, A = X\Sigma Y^T, A^{-1} = Y\Sigma^{-1}X^T$$

**Poznámka 8.5.** Kam se zobrazí jednotková koule?

$$\begin{aligned} 1 = \|X\|^2 &= \|A^{-1}AX\|^2 = \|A^{-1}y\|^2 = \left\| \underbrace{Y}_{\text{ortogonální}} \underbrace{\Sigma^{-1}X^T y}_{\text{vektor}} \right\|^2 = \|\Sigma^{-1} \underbrace{X^T y}_z\|^2 = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_r^{-1} \end{pmatrix} z \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{z_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{z_r}{\sigma_r} \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{z_r^2}{\sigma_r^2} \end{aligned}$$

Elipsoid s poloosami délek  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$

- míra deformace:  $\frac{\sigma_1}{\sigma_r}$
- speciálně:  $A$  ortogonální:  $\frac{1}{1}$

## 8.5 SVD a maticová norma

$$\|A\|_2 := \sigma_1(A)$$

$A$   $n \times n$  reg...  $\sigma_n = \min \|A - B\|_2$ ,  $B$  sing

**Definice 8.6** (číslo podmíněnosti).

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

speciálně

$$k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \geq 1$$

**Poznámka 8.7** (Pravidlo palce).  $k_2(A) \tilde{1}0^p \Rightarrow$  Gaussem ztratíme  $p$  desetinných míst přesnosti.

**Příklad 8.8.** Ortogonální matice  $k_2(A) = 1$

**Příklad 8.9.** Hilbertova matice  $(H_n)_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$

$$k_2(H_5) \tilde{1}0^5$$

$$k_2(H_{10}) \tilde{1}0^{13}$$

$$Ax \leq b \Rightarrow \min$$

Konec 13. přednášky

## Reference

[1] Domovská stránka předmětu na stránkách doktora Hladíka:

<http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA2>

[2] Prezentace na stránkách doktora Hladíka:

[http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA2/la\\_slides\\_2.pdf](http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA2/la_slides_2.pdf)