Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

Diplomová práce

Jaromír Malenko

Multiagentní systémy: prostředí a vševědoucnost

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Petr Štěpánek, DrSc.

Studijní program: Informatika, teoretická informatika

Praha 2004

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. dubna 2004 Jaromír Malenko

Poděkování

Abstrakt

Název práce: Multiagentní systémy: prostředí a vševědoucnost
Autor: Jaromír Malenko
Katedra (ústav): Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Petr Štěpánek, DrSc.
E-mail vedoucího: Petr.Stepanek@mff.cuni.cz
Abstrakt: Uvede se abstrakt v rozsahu 150 až 200 slov
Klíčová slova: klíčová slova (3 až 5)

Title: Multi–Agent Systems: Environment and Omniscience
Author: Jaromír Malenko
Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic
Supervisor: Prof. RNDr. Petr Štěpánek, DrSc.
Supervisor's e-mail address: Petr.Stepanek@mff.cuni.cz
Abstract: Uvede se anglicky abstrakt v rozsahu 150 až 200 slov
Keywords: klíčová slova (3 až 5) v angličtině

Obsah

Kapitola 1

Model znalosti

Bude popsána *modální logika* (angl. modal logic). Říkáme, že agent zná fakt φ, jestliže φ platí ve všech světech, které považuje za možné. Uvedeme vlastnosti, které od znalosti očekáváme.

1.1 Model možných světů

Předpokládáme skupinu n agentů pojmenovaných $1 \dots n$. Svět, o kterém usuzují, je popsán neprázdnou množinou Φ *výrokových proměnných* (angl. primitive propositions) typicky označovaných $p, p', q, q', \dots$.

Jazyk je množina formulí, ve které jsou všechny výrokové proměnné a je uzavřená na negaci, konjunkci a modální oprátor $K_1, \dots, K_n$. Výraz $K_i\varphi$ čteme „agent i zná φ“.

Sémantiku definujeme použitím modelu možných světů (angl. possible worlds), kterou formalizujeme pomocí *Kripkeho struktur* (angl. Kripke structures).

Definice 1.1.1 *Kripkeho struktura M pro n agentů nad Φ je (n+2)-tice $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n)$, kde*

- *S je množina stavů neboli možných světů;*
- *π je interpretace, která každému světu přiřazuje pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných, tj. $\pi(s) : \Phi \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ pro každý svět $s \in S$; a*
- *$\mathcal{K}_i$ je binární relace nad S, tj. množina dvojic z S.*

Pak výrok $\pi(s)(p)$ čteme „p je pravdivé ve světě s“. Zápis $(s,t) \in \mathcal{K}_i$ čteme „agent i považuje ve světě s svět t za možný“. V praxi často předpokádáme, že relace $\mathcal{K}_i$ jsou ekvivalence, ale dále budou uvedeny i jiné vlastnosti.

Kripkeho strukturu můžeme reprezentovat ohodnoceným orientovaným grafem. Vrcholy odpovídají světům z S, ohodnocení vrcholu popisuje ohodnocení výrokových proměnných v s. Hrany jsou ohodnoceny množinami agentů: ohodnocení hrany z s do t obsahuje i jestliže $(s,t) \in \mathcal{K}_i$.

Definujme co znamená, že formule je pravdivá v daném světě nejaké struktury. Zápis $(M,s) \models \varphi$ čteme „φ je pravdivé v (M,s)“, „φ platí v (M,s)“ nebo „(M,s) splňuje φ“.

Definice 1.1.2 *Pro Kripkeho strukturu M a svět $s \in S$ definujeme relaci pravdivosti $\models$ formule indukcí:*

- *$(M,s) \models p$ ($p \in \Phi$) právě když $\pi(s)(p) = true$;*
- *$(M,s) \models \varphi$ právě když $(M,s) \not\models \varphi$;*
- *$(M,s) \models \varphi \land \psi$ právě když $(M,s) \models \varphi$ a $(M,s) \models \psi$; a*
- *$(M,s) \models K_i\varphi$ právě když $(M,t) \models \varphi$ pro všechny světy t takové, že $(s,t) \in \mathcal{K}_i$.*

1.2 Společná a distribuovaná paměť

Abychom mohli zavést pojmy společná a distribuovaná paměť, rozšíříme jazyk o další modální operátory E_G („každý ve skupině G zná“ (angl. everybody in group G knows)), C_G („je společnou znalostí ve skupině G“ (angl. common knowledge)) a D_G („je distribuovanou znalostí ve skupině G“ (angl. distributed knowledge)), kde $G \subseteq \{1, \ldots, n\}$ neprázdná. Pokud G je množina všech agentů, vymecháváme index G.

Sémantiku těchto oprátorů definujme rozšířením definice pravdivosti.

Definice 1.2.1 *Rozšíření definice relace pravdivosti $\models$ 1.1.2:*

- $(M, s) \models E_G\varphi$ *právě když* $(M, s) \models K_i\varphi$ *pro všechny* $i \in G$.

Nechť $E^0_G\varphi$ je zkratka pro $K_G\varphi$. Dále nechť $E^{k+1}_G\varphi$ je zkratka pro $E_G E^k_G\varphi$.

Definice 1.2.2 *Rozšíření definice relace pravdivosti $\models$ 1.1.2:*

- $(M, s) \models C_G\varphi$ *právě když* $(M, s) \models E^k_G\varphi$ *pro všechna* $k = 1, 2, \ldots$.
- $(M, s) \models D_G\varphi$ *právě když* $(M, t) \models \varphi$ *pro všechna* t *taková, že* $(s, t) \in \bigcap_{i \in G} \mathcal{K}_i$.

1.3 Vlastnosti znalosti

V této sekci provedeme diskuzi toho co znamená výrok „agent i zná φ“. Jak moc výše uvedená sémantika (Kripkeho struktury s definicí pravdivosti) zachycuje naše vnímání znalosti.

Definice 1.3.1 *Pro Kripkeho strukturu* $M = (S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ *a formuli* φ *říkáme, že*

- φ *je validní (valid) v* M*, jestliže* $(M, s) \models \varphi$ *pro všechny stavy* $s \in S$*. Píšeme* $(M, s) \models \varphi$*;*
- φ *je splnitelná (satisfiable) v* M*, jestliže* $(M, s) \models \varphi$ *pro nějaké* $s \in S$*; a*
- φ *je splnitelná, jestliže* $(M, s) \models \varphi$ *pro nějaký model* M *a nějaké* $s \in S$*.*

Shrňme vlastnosti kladené na znalost. V této sekci předpokládáme, že relace $\mathcal{K}_i$ jsou ekvivalence.

Modus ponens (angl. distribution axiom)

$$\models (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow K_i\psi$$

Pravidlo zobecnění (angl. knowledge generalization rule)

Pro všechny modely M, jestliže $M \models \varphi$, pak $M \models K_i\varphi$.

Axiom pravdivosti, znalosti (angl. knowledge axiom, truth axiom)

$$\models K_i\varphi \Rightarrow \varphi$$

Axiom pozitivní instrospekce (angl. positive introspection axiom)

$$\models K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi$$

Axiom negativní instrospekce (angl. negative introspection axiom)

$$\models \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$$

Tyto vlastnosti tvoří axiomatický systém zvaný S5 (viz. 2.1). Následující věta shrnuje, že tyto vlastnosti platí pro výše uvedenou definici pravdivosti.

Věta 1.3.1 *Pro všechny formule φ a ψ, všechny struktury M kde každá relace $\mathcal{K}_i$ je ekvivalence a všechny agenty $i = 1, \ldots, n$,*

(i) $\models (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow K_i\psi$;

(ii) jestliže $M \models \varphi$, *pak* $M \models K_i\varphi$;

(iii) $\models K_i\varphi \Rightarrow \varphi$;

(iv) $\models K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi$; *a*

(v) $\models \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$.

Pro $E_G\varphi$ platí

$$\models E_G\varphi \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi.$$

Společná znalost má analogické vlastnosti jako jsou vlastnosti operátoru K_i uvedené výše. Další zajímavou vlastností je: Jestliže $G' \subseteq G$, pak $C_G\varphi \Rightarrow C_{G'}\varphi$. Všechny tyto vlastnosti plynou z následujících dvou axiomů.

Axiom pevného bodu (angl. fixed-point axiom)

$$\models C_G\varphi \Leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$$

Indukční pravidlo (angl. induction rule)

Pro všechny struktury M, jestliže $M \models \varphi \Rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$, pak $M \models \varphi \Rightarrow C_G\psi$.

Věta 1.3.2 *Pro všechny formule φ a ψ, všechny struktury M a všechny neprázdné $G \subseteq \{1, \ldots, n\}$,*

- $\models E_G\varphi \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$;
- $\models C_G\varphi \Leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$; *a*
- *jestliže* $M \models \varphi \Rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$, *pak* $M \models \varphi \Rightarrow C_G\psi$.

Pro distribuovanou znalost platí následující axiomy, které jsou také validní.

$$\models D_{\{i\}}\varphi \Leftrightarrow K_i\varphi$$

$$\models D_G\varphi \Rightarrow D_{G'}\varphi K_i \text{ jestliže } G \subseteq G'$$

1.4 Model založený na událostech

V kapitole 1.1 se znalost modelovala ve dvou částech. Kripkeho struktury se použily jako matematický model obsahující více agentů a pro tvrzení se používal jazyk logiky. Tento jazyk je založen na množině výrokových proměnných a je uzavřený na negaci, konjunkci a modální operátor. Tento tradiční přístup filozofie, matematické logiky a umělé inteligence je založen na logice (angl. logic-based approach).

Nyní představíme alternativní způsob modelování znalosti, který je založený na událostech (angl. event-based approach). Typicky se používá v teorii her a metematické ekonomice. Od předchozího se liší se dvou ohledech. Jednak místo Kripkeho struktur používá velmi související Aumanovy struktury (angl. Aumann structure). Zadruhé využívá pojmu události (angl. event), což je množina možných světů. Znalost se vyjadřuje jako operátor nad událostmi.

Předpokládejme neprázdnou množinu S možných *stavů* (angl. states). *Událost* (angl. event) je množina $e \subseteq S$ stavů. Říkáme, že ve stavu s platí událost e (angl. event holds at state), jestliže $s \in e$. Konjunkce dvou stavů je dána jejich sjednocením.

Definice 1.4.1 *Aumanova struktura A pro n agentů je (n+1)-tice $(S, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$, kde*

- *S je množina stavů světa; a*
- *$\mathcal{P}_i$ je rozklad (angl. partition) S pro každého agenta.*

Jestliže $\mathcal{P}_i = S_1, \ldots, S_n$, pak množiny S_j nazýváme třídy (angl. cells) rozkladu $\mathcal{P}_i$ nebo také *informační množiny* (information sets) agenta i. Třídu rozkladu $\mathcal{P}_i$ ve které je s označujeme $\mathcal{P}_i(s)$. Protože v Aumannových strukturách nejsou výrokové proměnné, není zde ani žádná funkce π, která by stavům přiřazovala pravdivostní ohodnocení.

Definice 1.4.2 *Pro Aumanovu strukturu $A = (S, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ definujeme operátor znalosti $\mathsf{K}_i : 2^S \to 2^S$ pro $i = 1, \ldots, n$ takto:*

$$\mathsf{K}_i(e) = \{s \in S | \mathcal{P}_i(s) \subseteq e\}.$$

$\mathsf{K}(e)$ se nazývá událost kdy *i zná (ví, že nastala událost) e*. 2^S znamená množinu všech podmnožin množiny S.

Definice 1.4.3 *Událost kdy každý ve skupině G zná e (angl. everyone in group G knowing e) zachycuje operátor $\mathsf{E}_G : 2^S \to 2^S$ a je definován*

$$\mathsf{E}_G(e) = \bigwedge_{i \in G} \mathsf{K}_i(e).$$

Iterace operátoru E_G definujeme takto: $\mathsf{E}^1_G(e) = \mathsf{E}_G(e)$ a $\mathsf{E}^{k+1}_G(e) = \mathsf{E}_G \mathsf{E}^K_G(e)$.

Definice 1.4.4 *Společnou znalost události e mezi agenty ve skupině G (angl. common knowledge of an event e among the agents in a group G) definujeme*

$$\mathsf{C}_G(e) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}^k_G(e).$$

Definice 1.4.5 *Distribuovanou znalost události e mezi agenty ve skupině G (angl. distributed knowledge of an event e among the agents in a group G) definujeme*

$$\mathsf{D}_G(e) = \left\{ s \in S \mid \left(\bigcap_{i \in G} \mathcal{P}_i(s) \right) \subseteq e \right\}.$$

Definice 1.4.6 *Pro dva rozklady $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ množiny S*

- *říkáme, že rozklad $\mathcal{P}$ je jemnější (angl. finer) než $\mathcal{P}'$ ($\mathcal{P}'$ je hrubší (angl. coarser) než $\mathcal{P}$), jestliže $\mathcal{P}(s) \subseteq \mathcal{P}'(s)$ pro všechny $s \in S$;*
- *definujeme průsek (angl. meet), označujeme $\mathcal{P} \sqcap \mathcal{P}'$, jako nejjemnější rozklad hrubší než $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$; a*
- *definujeme spojení (angl. join), označujeme $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{P}'$, jako nejhrubší rozklad jemněší než $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$.*

Věta 1.4.1 *Nechť $A = (S, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ je Aumannova struktura, $G \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je skupina agentů a $e \subseteq S$. Pak*

- *$s \in \mathsf{C}_G(e)$ právě když $(\sqcap_{i \in G} \mathcal{P}_i)(s) \subseteq e$;*
- *$s \in \mathsf{D}_G(e)$ právě když $(\sqcup_{i \in G} \mathcal{P}_i)(s) \subseteq e$.*

Mezi logickým přístupem a přístupem založeným na událostech je úzká souvislost. Na Aumannovy struktury můžeme nahlížet jako na rámce (angl. frame) (viz. 2.1.13) [**?**]. Tyto přístupy jsou na sebe navzájem převoditelné.

Kapitola 2

Axiomatické systémy

V této kapitole uvažujeme relace $\mathcal{K}_i$ libovolné (nemusí to být ekvivalence, jako v minulé kapitole).

2.1 Axiomatický systém K_n

Definice 2.1.1 *Nechť $\mathcal{L}_n(\Phi)$ je množina formulí, které vzniknou z množiny výrokových proměnných Φ uzavřením na negaci, konjunkci a modální operátory $K_1, \ldots, K_n$.*

Nechť $\mathcal{L}_n^C(\Phi)$ (resp. $\mathcal{L}_n^D(\Phi)$) je jazyk, který vznikne navíc použitím modálních operátorů E_G a C_G (resp. D_G), kde G je neprázdná podmnožina $1, \ldots, n$. Nechť jazyk $\mathcal{L}_n^{CD}(\Phi)$ vznikne přidáním všech modálních operátorů E_G, C_G a D_G.

Definice 2.1.2 *Nechť $\mathcal{M}_n(\Phi)$ je třída Kripkeho struktur pro n agentů nad Φ.*

Definice 2.1.3 *Jestliže A je množina, definujeme $|A|$ jako mohutnost množiny A.*

Pro formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n^{CD}(\Phi)$ definujeme délku (angl. length) formule $|\varphi|$ jako počet symbolů, které se ve φ vyskytují.

Definice 2.1.4 *Řekneme, že ψ je podformule (angl. subformula) formule φ, jestliže ϕ je formule a ϕ je podřetězcem φ.*

Nechť $Sub(\varphi)$ je množina všech podformulí formule φ.

Lemma 2.1.1 *Platí $|Sub(\varphi)| \leq |\varphi|$.*

Definice 2.1.5 *Jestliže $\mathcal{M}$ je podtřída $\mathcal{M}_n$, říkáme, že φ je validní vzhledem k $\mathcal{M}$ (valid with respect to), jestliže φ je validní ve všech strukturách v $\mathcal{M}$. Píšeme $\mathcal{M} \models \varphi$.*

Říkáme, že φ je splnitelná v $\mathcal{M}$ (satisfiable with respect to), jestliže φ je splnitelná v nějaké struktuře v $\mathcal{M}$.

Věta 2.1.2 *Pro včechny formule $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n$, struktury $M \in \mathcal{M}_n$ a agenty $i = 1, \ldots, n$,*

(i) jestliže φ je tautologie, pak $\mathcal{M}_n \models \varphi$;

(ii) jestliže $M \models \varphi$ a $M \models \varphi \Rightarrow \psi$, pak $M \models \psi$;

(iii) $\mathcal{M}_n \models (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow K_i\psi$; a

(iv) jestliže $M \models \varphi$, pak $M \models K_i\varphi$.

Axiomatický systém (angl. axiom system) AX se skládá z axiomů (angl. axioms) a odvozovacích pravidel (inference rules).

Definice 2.1.6 *Důkaz (angl. proof) v AX je posloupnost formulí taková, že každá formule je buď instancí axiomu nebo je z předchozích formulí odvozena nějakým odvozovacím pravidlem.*

Důkaz formule (angl. proof of the formula) φ v AX je důkaz jehož poslední formule je φ.

Definice 2.1.7 *Říkáme, že φ je dokazatelná v AX (angl. provable in), jestliže existuje důkaz φ v AX. Píšeme $AX \vdash \varphi$.*

Definice 2.1.8 *Axiomatický systém* K_n *se obsahuje následující axiomy a pravidla.*

A1. Všechny tautologie výrokového počtu

A2. $(K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow K_i\psi, i = 1, \dots, n$ *(**K**, distributivní axiom (angl. distributive axiom))*

R1. Z φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ odvoď ψ (modus ponens)

R2. Z φ odvoď $K_i\varphi$ (generalizace znalosti (angl. generalization rule))

Poznámka 2.1.1 *Věta o dedukci (angl. deduction theorem) v* K_n *neplatí: $AX, \varphi \vdash \psi \not\Rightarrow AX \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.*

Definice 2.1.9 *Řekneme, že axiomatický systém AX je*

- *korektní (angl. sound) pro jazyk $\mathcal{L}$ vzhledem ke třídě $\mathcal{M}$, jestliže každá formule z $\mathcal{L}$ dokazatelná v AX je validní vzhledem k $\mathcal{M}$; a*
- *úplný (angl. complete) pro jazyk $\mathcal{L}$ vzhledem ke třídě $\mathcal{M}$, jestliže každá formule z $\mathcal{L}$ validní vzhledem k $\mathcal{M}$ je dokazatelná v AX.*

Definice 2.1.10 *Nechť AX je axiomatický systém.*

- *Řekneme, že formule φ je AX-konzistentní (angl. -consistent), jestliže $\neg\varphi$ není dokazatelná v AX.*
- *Konečná množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ je AX-konzistentní, jestliže $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ je AX-konzistentní.*
- *Nekonečná množina je AX-konzistentní, jetliže každá její konečná podmnožina je AX-konzistentní.*
- *Množina formulí F je maximální AX-konzistentní (angl. maximal AX-consistent) množina vzhledem k jazyku $\mathcal{L}$, jestliže*
  - *(i) F je AX-konzistentní a*
  - *(ii) je-li $\varphi \in \mathcal{L}, \varphi \notin F$, pak $F \cup \{\varphi\}$ není AX-konzistentní.*

Věta 2.1.3 *Nechť $\mathcal{L}$ je množina spočetně mnoha formulí, uzavřená na výrokové spojky negace a konjunkce. Pak v každém axiomatickém systému AX, který obsahuje všechny instance A1 a R1 pro $\mathcal{L}$ platí, že každá AX-konzistentní množina $F \subseteq \mathcal{L}$ může být rošířena do maximální AX-konzistentní množiny pro $\mathcal{L}$. Navíc, je-li F maximální AX-konzistentní množina, pak pro ní platí:*

(i) Pro libovolnou formuli $\varphi \in \mathcal{L}$, právě jedna z φ a $\neg\varphi$ je v F.

(ii) $\varphi \wedge \psi \in F$ právě když $\varphi \in F$ a $\psi \in F$.

(iii) Jestliže $\varphi \in F$ a $(\varphi \Rightarrow \psi) \in F$, pak $\psi \in F$.

(iv) Je-li φ dokazatelná v AX, pak $\varphi \in F$.

Věta 2.1.4 K_n *je úplná a korektní axiomatizace vzhledem k $\mathcal{M}_n$ pro formule z jazyka $\mathcal{L}_n$.*

Na znalost klademe další požadavky vyjádřené axiomy.

A3. $K_i\varphi \Rightarrow \varphi, \quad i = 1, \dots, n$ (**T**, axiom znalosti (angl. knowledge axiom))

A4. $K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi, \quad i = 1, \dots, n$ (**4**, axiom pozitivní introspekce (angl. positive introspection axiom))

A5. $\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$, $\quad i = 1,\ldots,n$ (**5**, axiom negativní introspekce (angl. negative introspection axiom))

Axiom A3 odlišuje znalost od přesvědčení. Pokud chceme zahrnout toto přesvědčení, nahradíme axiom A3 axiomem A6. Axiom A6 je dokazatelný z A3, A1 a R1.

A6. $K_i(false)$, $\quad i = 1,\ldots,n$ (**D**, axiom konzistence (angl. consistency axiom))

A7. $\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi$, $\quad i = 1,\ldots,n$

Některé teorie se jmenují podle toho, jaké obsahují axiomy: KD45 , KT4 = S4 , KT45 = S5 , KD. Někdy se K v názvu teorie vynechává. Může se uvádět spodní index n pro zdůraznění toho, že uvažujeme systémy s n agenty.

Ukážeme souvislost mezi uvedenými axiomy a vlastnostmi relací $\mathcal{K}_i$.

Definice 2.1.11 *Binární relace $\mathcal{K}$ se nazývá eukleidovská (angl. Euclidean) na množině S, jestliže pro všechna $s,t,u \in S$ platí: jestliže $(s,t) \in \mathcal{K}$ a $(s,u) \in \mathcal{K}$, pak $(t,u) \in \mathcal{K}$.*

Binární relace $\mathcal{K}$ se nazývá seriální (angl. serial) na množině S, jestliže pro všechna $s \in S$ existuje $t \in S$ takové, že $(s,t) \in \mathcal{K}$.

Věta 2.1.5 *(i) Jestliže $\mathcal{K}$ je reflexivní a eukleidovská, pak $\mathcal{K}$ je symetrická a tranzitivní.*

(ii) Jestliže $\mathcal{K}$ je symetrická a tranzitivní, pak $\mathcal{K}$ je eukleidovská.

(iii) Následující je ekvivalentní:

- *(a) $\mathcal{K}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*
- *(b) $\mathcal{K}$ je symetrická, tranzitivní a seriální.*
- *(c) $\mathcal{K}$ je reflexivní a eukleidovská.*

Definice 2.1.12 *Označme $\mathcal{M}_n^r$ třídu Kripkeho struktur, jejichž relace jsou reflexivní.*
Označme $\mathcal{M}_n^{rt}$ třídu Kripkeho struktur, jejichž relace jsou reflexivní a tranzitivní.
Označme $\mathcal{M}_n^{rst}$ třídu Kripkeho struktur, jejichž relace jsou reflexivní, symetrické a tranzitivní.
Označme $\mathcal{M}_n^{elt}$ třídu Kripkeho struktur, jejichž relace jsou eukleidovské a tranzitivní.

Věta 2.1.6 *Pro formule jazyka $\mathcal{L}_n$:*

(i) T_n *je korektní a úplná axiomatizace $\mathcal{M}_n^r$.*

(ii) $\mathrm{S4}_n$ *je korektní a úplná axiomatizace $\mathcal{M}_n^{rt}$.*

(iii) $\mathrm{S5}_n$ *je korektní a úplná axiomatizace $\mathcal{M}_n^{rst}$.*

(iv) $\mathrm{KD45}_n$ *je korektní a úplná axiomatizace $\mathcal{M}_n^{elt}$.*

Následující tabulka pro každý axiom uvádí odpovídající vlastnost relací $\mathcal{K}_i$.

Axiom	Vlastnost $\mathcal{K}_i$
A3. $K_i\varphi \Rightarrow \varphi$	reflexivní
A4. $K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi$	tranzitivní
A5. $\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$	eukleidovská
A6. $K_i(false)$	seriální
A7. $\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi$	symetrická

Definice 2.1.13 *Rámec (angl. frame) pro n agentů je (n+1)-tice $(S,\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n)$, kde S je množina stavů a $\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n$ jsou binární relace nad S.*

Říkáme, že Kripkeho struktura $(S,\pi,\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n)$ je založena (based) na rámci $(S,\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n)$.

Na Aumannovy struktury můžeme nahlížet jako na rámce.

2.2 Společná znalost

Definice 2.2.1 *Nechť axiomatický systém* K_n^C *(resp.* T_n^C *,* $\mathrm{S4}_n^C$ *,* $\mathrm{S5}_n^C$ *,* $\mathrm{KD45}_n^C$ *) se skládá z axiomů* K_n *(resp.* T_n *,* $\mathrm{S4}_n$ *,* $\mathrm{S5}_n$ *,* $\mathrm{KD45}_n$ *) přidáním následujících dvou axiomů a odvozovacího pravidla:*

C1. $E_G\varphi \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$

C2. $C_G\varphi \Rightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$

RC1. Z $\varphi \Rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)$ *odvoď* $\varphi \Rightarrow C_G\psi$ *(indukční pravidlo (induction rule))*

Věta 2.2.1 *Pro formule jazyka* $\mathcal{L}_n^C$*:*

(i) K_n^C *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n$*.*

(ii) T_n^C *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^r$*.*

(iii) $\mathrm{S4}_n^C$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{rt}$*.*

(iv) $\mathrm{S5}_n^C$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{rst}$*.*

(v) $\mathrm{KD45}_n^C$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{elt}$*.*

2.3 Distribuovaná znalost

Operátor D_G má stejné vlastnosti jako operátor K_G. Navíc má následující vlastnosti:

D1. $D_{\{i\}}\varphi \Leftrightarrow K_i\varphi, \quad i = 1, \ldots, n$

D2. $D_G\varphi \Rightarrow D_{G'}\varphi$ jestliže$G \subseteq G'$

Definice 2.3.1 *Nechť axiomatický systém* K_n^D *(resp.* T_n^D *,* $\mathrm{S4}_n^D$ *,* $\mathrm{S5}_n^D$ *,* $\mathrm{KD45}_n^D$ *) se skládá z axiomů* K_n *(resp.* T_n *,* $\mathrm{S4}_n$ *,* $\mathrm{S5}_n$ *,* $\mathrm{KD45}_n$ *) přidáním axiomů D1 a D2.*

Věta 2.3.1 *Pro formule jazyka* $\mathcal{L}_n^D$*:*

(i) K_n^D *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n$*.*

(ii) T_n^D *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^r$*.*

(iii) $\mathrm{S4}_n^D$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{rt}$*.*

(iv) $\mathrm{S5}_n^D$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{rst}$*.*

(v) $\mathrm{KD45}_n^D$ *je korektní a úplná axiomatizace* $\mathcal{M}_n^{elt}$*.*

Sloučením společné a ditribuované znalosti můžeme dostat jazyk $\mathcal{L}_n^{CD}$ a jeho korektní a úplnou axiomatizaci.

Kapitola 3

Znalost v multiagentních systémech

3.1 Multiagentní systém

Předpokládáme, že v každém okamžiku se každý agent nachází v nějakém stavu. Tento stav obsahuje veškerou informaci dostupnou agentovi. Toto nazýváme lokálním stavem (angl. local state).

Agenti jsou v prostředí. Na prostředí nahlížíme jako na „vše ostatní, co je relevantní". v úloze, kterou systém řeší.

Definice 3.1.1 *a a a a Definujeme globální stav (angl. global state) systému jako (n+1)-tici* $(s_e, s_1, \dots, s_n)$*, kde* s_e *je globální stav prostředí (angl. environment) a* s_i *je lokální stav agenta* i*.*

Globální stav popisuje systém v diskrétním čase. Čas je libovolná lineární množina. Čas $r(0)$ popisuje počáteční globální systému, $r(1)$ popisuje nejbližší další stav, atd.

Nechť L_e je množina možných stavů prostředí a L_i je množina možných stavů agenta i.

Definujeme množinu globálních stavů $\mathcal{G} = L_e \times L_1 \times \dots L_n$.

Běh (angl. run) nad $\mathcal{G}$ je funkce z domény času do $\mathcal{G}$.

Pro běh r a čas m nazýváme dvojici (r, m) bod (angl. point).

Jestliže $(r, m) = (s_e, s_1, \dots, s_n)$ je globální stav v bodě (r, m), pak definujeme $r_e(m) = s_e$ a $r_i(m) = s_i$ lokální stav agenta i pro $i = 1, \dots, n$.

Kolo (round) m v běhu r se uskuteční mezi body $(m-1)$ a m.

Systém $\mathcal{R}$ nad $\mathcal{G}$ je množina běhů nad $\mathcal{G}$.

Říkáme, že (r, m) je bod systému (angl. point in system) $\mathcal{R}$, jetliže $r \in \mathcal{R}$.

3.2 Znalost

Interpretovaný systém (angl. interpreted system) je $(\mathcal{R}, \pi)$, kde $\mathcal{R}$ je běh nad množinou $\mathcal{G}$ globálních stavů a π je interpretace výrokových proměnných z Φ nad $\mathcal{G}$.

Definice 3.2.1 *Nechť* $s = (s_e, s_1, \dots, s_n)$ *a* $s' = (s'_e, s'_1, \dots, s'_n)$ *jsou dva globální stavy v* $\mathcal{R}$*. Řekneme, že* s *a* s' *jsou nerozlišitelné (angl. indistinguishable) pro agenta* i*, a píšeme* $s \sim_i s'$*, jestliže* $s_i = s'_i$*.*

Definice 3.2.2 *Řekneme, že dva body* (r, m) *a* (r', m') *jsou nerozlišitelné pro agenta* i*, a píšeme* $(r, m) \sim_i (r', m')$*, jestliže* $r_i(m) = r'_i(m)$*.*

Definice 3.2.3 *Nechť* $\mathcal{I} = (\mathcal{R}, m)$ *je interpretovaný systém a* $M_\mathcal{I} = (S, \pi, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n)$ *je odpovídající Kripkeho struktura. Formule* $\varphi \in \mathcal{L}_n^C D$ *je pravdivá v bodě* (r, m) *interpretovaného systému* $\mathcal{I}$*, píšeme* $(\mathcal{I}, r, m) \models \varphi$*, jestliže* $(M_\mathcal{I}, s) \models \varphi$*.*

Interpretace znalosti je dána externě. Nepředpokládáme, že agenti počítají svou znalost nebo že odpovídají na otázky o své znalosti.

3.3 Čas

Rozšíříme jazyk zavedením nových modálních operátorů u čase.

Definice 3.3.1 *Temporální operátory (angl. temporal operators)* $\Box$ *„vždy“,* $\Diamond$ *„někdy“,* $\bigcirc$ *„v příštím okamžiku“ a* U *„dokud“ definujeme následujícím způsobem:*

$(\mathcal{I}, r, m) \models \Box\varphi$ *právě když* $(\mathcal{I}, r, m') \models \varphi$ *pro všechna* $m' \geq m$;

$(\mathcal{I}, r, m) \models \Diamond\varphi$ *právě když* $(\mathcal{I}, r, m') \models \varphi$ *pro nějaké* $m' \geq m$;

$(\mathcal{I}, r, m) \models \bigcirc\varphi$ *právě když* $(\mathcal{I}, r, m+1) \models \varphi$; *a*

$(\mathcal{I}, r, m) \models \varphi U \psi$ *právě když* $(\mathcal{I}, r, m') \models \psi$ *pro nějaké* $m' \geq m$ *a* $(\mathcal{I}, r, m'') \models \varphi$ *pro všechna* m'' *taková, že* $m \leq m'' < m'$.

Kapitola 4

Logická vševědoucnost

Definice 4.0.2 *Řekneme, že množina formulí Ψ logicky implikuje (angl. logically implies) φ vzhledem k třídě struktur $\mathcal{M}$, jestliže pro všechny struktury $M \in \mathcal{M}$ a všechny stavy $s \in M$ platí: Jestliže $(M, s) \models \psi$ pro každé $\psi \in \Psi$, pak $(M, s) \models \varphi$.*

Definice 4.0.3 *Formule φ matriálně implikuje (angl. materially implies) ϕ, jestliže $\varphi \Rightarrow \psi$ je validní.*

Jestliže Ψ je konečné, Ψ logicky implikuje φ vzhledem k $\mathcal{M}_n$, jestliže $(\bigwedge \Psi) \Rightarrow \varphi$ je dokazatelná v K_n . Tedy ve výše uvedené standartní modální logice logická a materiální implikace splývá.

Na logickou vševědoucnost je možno nahlížet jako na uzávěrovou vlastnost agentovy znalosti. Nejsilnější formou je úplná logická vševědoucnost.

Definice 4.0.4 *Agent je úplně logicky vševědoucí (angl. fully logically omniscient) vzhledem k třídě struktur $\mathcal{M}$, jestliže kdykoliv zná všechny formule z množiny Ψ a Ψ logicky implikuje formuli φ vzhledem k $\mathcal{M}$, pak agent zná φ.*

V minulých kapitolách jsme popsali systémy s úplně logicky vševědoucí agenty vzhledem k $\mathcal{M}_n$.

Plná logická vševědoucnost obsahuje mnoho slabších forem vševědoucnosti.

- *Znalost validních formulí*: Jestliže φ je validní, pak agent i zná φ.
- *Uzávěr nad logickou implikací*: Jestliže agent i zná φ a φ logicky implikuje ψ, pak agent i zná ψ.
- *Uzávěr nad logickou ekvivalencí*: Jestliže agent i zná φ a φ je logicky ekvivalentní s ψ, pak agent i zná ψ.

Všechny uvedené druhy jsou speciálními případy úplné logické vševědoucnosti a proto platí v $\mathcal{M}_n$.

Jsou známy i jiné druhy vševědoucnosti, které neplynou z úplné logické vševědoucnosti.

- *Uzávěr nad materiální implikací*: Jestliže agent i zná φ a jestliže agent i zná $\varphi \Rightarrow \psi$, pak agent i zná ψ.
- *Uzávěr nad validní implikací*: Jestliže agent i zná φ a jestliže $\varphi \Rightarrow \psi$ je validní, pak agent i zná ψ.
- *Uzávěr nad konjunkcí*: Jestliže agent i zná φ a ψ, pak agent i zná $\varphi \wedge \psi$.

4.1 Reprezentace znalosti

Nejjednodušším a nejpřímějším způsobem, jak vyřešit problém logické vševědoucnosti, je vzdát se definice znalosti jako pravdy ve všech možných světech. Budeme definovat znalost přímo, jako uloženou v databázi formulí. Model možných světů zůstane zachován.

4.1.1 Syntaktický přístup

Změníme definici pravdivosti 1.1.2 tak, že nahradíme pravdivostní ohodnocení π syntaktickým přiřazením (angl. syntactic assignment). Syntaktické přiřazení přiřazuje pravdivostní hodnoty formulím ve všech světech.

Nechceme měnit sémantiku a proto syntaktické přiřazení musí být standartní.

Definice 4.1.1 *Syntaktické přiřazení σ je standartní (angl. standard), jestliže splňuje následující podmínky pro všechny formule φ a ψ:*

(i) $\sigma(s)(\varphi) = \mathbf{true}$ *právě když* $\sigma(s)(\neg\varphi) = \mathbf{false}$*; a*

(ii) $\sigma(s)(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{true}$ *právě když* $\sigma(s)(\varphi) = \mathbf{true}$ *a* $\sigma(s)(\psi) = \mathbf{true}$.

Definice 4.1.2 *Syntaktická struktura (angl. syntactic structure) M je dvojice (S, σ), kde S je množina stavů a σ je standartní syntaktické přiřazení.*

Definice 4.1.3 *Definujme pravdivost formule φ v syntaktické struktuře (S, σ) takto: $(M, s) \models \varphi$ právě když $\sigma(s)(\varphi) = \mathbf{true}$.*

Kripkeho strukturu $M = (S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ můžeme ztotožnit se syntaktickou strukturou (S, σ), kde $\sigma(s)(\varphi) = \mathbf{true}$, právě když $(M, s) \models \varphi$. Na syntaktické struktury tedy můžeme nahlížet jako na zobecněné Kripkeho struktury.

V této struktuře neplatí žádný druh logické vševědoucnosti. Ve 3. kapitole jsme využili znalosti v lokálním stavu: Jesliže dva stavy jsou ekvivalení, pak agent v obou stavech zná stejné formule. Tato vlastnost byla důsledkem definice pravdivosti. Abychom mohli zavést tuto a další vlastnosti, museli jsme klást další podmínky na relace $\mathcal{K}_i$.

4.1.2 Sémantický přístup

Předchozí přístup má nedostatek v sémantickém přístupu, který nyní vyřešíme.

Definice 4.1.4 *Montague-Scott struktura M je (n+2)-jice $(S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$, kde S je množina stavů, $\pi(s)$ je pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných pro každý stav $s \in S$ a $\mathcal{C}_i(s)$ je množina podmnožin S pro $i = 1, \ldots, n$.*

Montague-Scott struktury zkráceně nazýváme MS struktury.

Definice 4.1.5 *Definujme pravdivost formule φ v MS struktuře $M = (S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ pro negaci a konjunkci stejně jako v Kripkeho stukturách 1.1.2. Pravdivost modálního operátoru $K_i\varphi$ je dána takto:*
$(M, s) \models K_i\varphi$ *právě když* $\{t | (M, t) \models \varphi\} \in \mathcal{C}_i(s)$.

MS struktury mohou být nahlíženy jaho zobecněné Kripkeho struktury. Pro Kripkeho strukturu $M = (S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$, kde $\mathcal{K}_i = \{t | (s, t) \in \mathcal{K}_i\}$ je odpovídající MS struktura $M = (S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$, kde $\mathcal{C}_i$ je množina všech supermnožin (TODO: terminologie) z $\mathcal{K}_i(s)$.

Věta 4.1.1 *Následující je korektní a úplná axiomatizace vzhledem k MS strukturám:*

A1. Všechny instance tautologií výrokové logiky

R1. Z φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ odvoď ψ (modus ponens)

LE. Z $\varphi \Leftrightarrow \psi$ odvoď $K_i\varphi \Leftrightarrow K_i\psi$

Neplatí žádný druh logické vševědoucnosti kromě uzávěru nad logickou ekvivalencí. Agenti nejsou schopni rozlišit mezi logicky ekvivalentními formulemi. Tedy MS struktura je nejobecnější sémantický model znalosti.

Výše uvedené přístupy jsou nejsilnější a nejobecnější možné přístupy. Tato síla má i své zápory. Jedním je malá míra intuice, kterou získáme při zkoumání těchto struktur. Jsou spíše způsobem jak reprezentovat znalost než jak ji modelovat. Např. sémantika v Kripkeho strukturách definuje znalost jako pravdu ve všech možných světech, ale tato definice vyžaduje logickou vševědoucnost.

4.2 Nestandartní logika

4.2.1 Nestandartní struktury

Fomule φ a $\neg\varphi$ mají nezávislé pravdivostní ohodnocení. Pro každý stav s mějme adjungovaný (adjunct) stav s^*. Definujeme, že formule φ je pravdivá právě když φ neplatí ve s^*.

Stav si můžeme představit jako dvojici $\langle B_T, B_F\rangle$ databází, kde B_T je databáze pravdivých formulí a B_F je databáze nepravdivých formulí. Na stav s^* pak můžeme nahlížet jako na stav $\langle \overline{B_F}, \overline{B_T}\rangle$. Formule φ platí ve stavu s, jestliže $\varphi \in B_T$. Formule $\neg\varphi$ platí ve stavu s, jestliže $\varphi \in B_F$. Jestliže $B_T = \overline{B_F}$, pak dostáváme standartní logiku.

Definice 4.2.1 *Nestandartní (Kripkeho) struktura M je $(n+3)$-jice $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots \mathcal{K}_n, ^*)$, kde $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots \mathcal{K}_n)$ je standartní Kripkeho struktura a * je unární funkce z S do S taková, že $s^{**} = s$.*

Definice 4.2.2 *Třídu nestandartních struktur pro n agentů nad Φ označíme $\mathcal{NM}_n(\Phi)$. Pokud je Φ zřejmé z kontextu, píšeme $\mathcal{NM}_n$.*

Definice 4.2.3 *Relace pravdivosti je definována stejně jako ve standartních Kripkeho strukturách 1.1.2, kromě negace:*
$(M, s) \models \neg\varphi$ právě když $(M, s^*) \not\models \varphi$.

Definice 4.2.4 *Stav s ve kterém neplatí φ ani $\neg\varphi$ nazýváme neúplný (angl. incomplete). Jinak stav s nazýváme úplný (angl. complete).*

Stav s ve kterém platí φ i $\neg\varphi$ nazýváme koherentní (angl. coherent). Jinak stav s nazýváme nekoherentní (angl. incoherent).

Definice 4.2.5 *Říkáme, že stav s je standartní (standard), jestliže $s = s^{**}$.*

Věta 4.2.1 *Nechť M je nestandardní struktura. Pak*

(i) $(M, s) \models \neg\neg\varphi$ *právě když* $(M, s) \models \varphi$.

(ii) $(M, s) \models \varphi \vee \psi$ *právě když* $(M, s) \models \varphi$ *nebo* $(M, s) \models \psi$.

(iii) $(M, s) \models \neg(\varphi \wedge \psi)$ *právě když* $(M, s) \models \neg\varphi \vee \neg\psi$.

(iv) $(M, s) \models \neg(\varphi \vee \psi)$ *právě když* $(M, s) \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(v) $(M, s) \models \varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2)$ *právě když* $(M, s) \models (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$.

(vi) $(M, s) \models \varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)$ *právě když* $(M, s) \models (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2)$.

Věta 4.2.2 *Žádná formule z $\mathcal{L}_n$ není validní vzhledem k $\mathcal{NM}_n$. Existuje nestandardní struktura M a stav s z M takový, že každá formule z $\mathcal{L}_n$ je nepravdivá v s, a stav t z M takový, že každá formule z $\mathcal{L}_n$ je pravdivá v t.*

Stejně jako ve Kripkeho strukturách, platí úplná logická vševědoucnost. Nemusí platit uzávěr nad materální implikací. Platí znalost všech validních formulí, ale neexistuje žádná validní formule.

4.2.2 Silná implikace

Definice 4.2.6 *Výrokovou spojku silná implikace (strong implication) $\hookrightarrow$ definujeme*
$(M, s) \models \varphi_1 \hookrightarrow \varphi_2$ právě když $(M, s) \models \varphi_2$ platí vždy když platí $(M, s) \models \varphi_1$.

Definice 4.2.7 *Množinu formulí získaných uzavřením $\mathcal{L}_n(\Phi)$ na spojku $\hookrightarrow$ označíme $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}(\Phi)$. Pokud je Φ zřejmé z kontextu, píšeme $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}$.*

Formule z $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}(\Phi)$ nazýváme nestandardní formule.

Definice 4.2.8 *Logiku a interpretaci s jazykem* $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}$ *nazýváme nestandardní výroková logika (non-standard propositional logic).*

Definice 4.2.9 *Definujeme* **true** *jako zkratku za nějakou nestandardní tautologii, například* $\varphi \hookrightarrow \varphi$.

Definujeme **false** *jako zkratku za* $\neg$**true**.

Věta 4.2.3 *Nechť* φ_1 *a* φ_2 *jsou formule z* $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}$. *Pak* φ_1 *logicky implikuje* φ_2 *vzhledem k* $\mathcal{NM}_n$ *právě když* $\varphi_1 \hookrightarrow \varphi_2$ *je validní vzhledem k* $\mathcal{NM}_n$.

Definice 4.2.10 *Axiomatický systém* $\mathrm{K}_n^{\hookrightarrow}$ *získáme z axiomatického systému* K_n *2.1 následujícím způsobem:*

(i) nahrazením výrokového usuzování nestandardním výrokovým usuzováním; a

(ii) nahrazením standardní implikace ($\Rightarrow$) *silnou implikací* ($\hookrightarrow$).

Definice 4.2.11 *Axiomatický systém* $\mathrm{K}_n^{\hookrightarrow}$ *obsahuje všechny instance následujícího schema axiomu a odvozovacích pravidel:*

A2$^{\hookrightarrow}$. $(K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \hookrightarrow \psi)) \hookrightarrow K_i\psi$ *distribuční axiom (angl. distributivity axiom)*

NPR. Všechna korektní odvozovací pravidla nestandardní výrokové logiky

R2. Z φ *odvoď* $K_i\varphi$ *generalizace znalosti (angl. knowledge generalization)*

Logická vševědoucnost může být, podobně jako v K_n , omezena kladením různých podmínek na relace $\mathcal{K}_i$. Podmínky mohou být podobné jako v 2.1, ale místo standardní implikace používají silnou implikaci. Pro zachycení pozitivní introspekce, musíme na $\mathcal{K}_i$ klást další podminky, např: jestliže $(s,t) \in \mathcal{K}_i$, pak $(s^*,t^*) \in \mathcal{K}_i$.

Věta 4.2.4 $\mathrm{K}_n^{\hookrightarrow}$ *je korektní a úplná axiomatizace vzhledem k* $\mathcal{NM}_n$ *pro formule z jazyka* $\mathcal{L}_n^{\hookrightarrow}$.

4.3 Model nemožných světů

Definice 4.3.1 *Struktura nemožných světů (angl. impossible–worlds structure)* M *je* $(n+3)$*-jice* $(S, W, \sigma, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$, *kde* $(S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ *je Kripkeho rámec,* $W \subseteq S$ *je množina možných stavů nebo světů a* σ *je standardní syntaktické přiřazení na možných stavech, tj. pro* $s \in W$ *platí*

(i) $\sigma(s)(\varphi \wedge \psi) =$ **true** *právě když* $\sigma(s)(\varphi) =$ **true**

(ii) $\sigma(s)(\neg\varphi) =$ **true** *právě když* $\sigma(s)(\varphi) =$ **false**; *a*

(iii) $\sigma(s)(K_i\varphi) =$ **true** *právě když* $\sigma(t)(\varphi) =$ **true** *pro všechna* t *taková, že* $(s,t) \in \mathcal{K}_i$.

Definice 4.3.2 *Splnitelnost definujeme:* $(M,s) \models \varphi$ *právě když* $\sigma(s)(\varphi) =$ **true**.

Definice 4.3.3 *Množina* Ψ *formulí logicky implikuje (angl. logically implies) formuli* φ *vzhledem k strukturám nemožných světů (angl. with respect to impossible–worlds structures), jestliže pro každou strukturu nemožných světů* $M = (S, W, \sigma, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ *a možný stav* $s \in W$ *platí: jestliže* $(M,s) \models \psi$ *pro všechny* $\psi \in \Psi$, *pak* $(M,s) \models \varphi$.

φ *je validní (angl. valid) vzhledem k strukturám nemožných světů, jestliže pro každou strukturu nemožných světů* $M = (S, W, \sigma, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ *a možný stav* $s \in W$ *platí* $(M,s) \models \varphi$.

Protože agenti uvažují nemožné stavy při rozhodování o znalosti, ale nemožné stavy neberou v úvahu při určování logické implikace, nemusí platit logická vševědoucnost. Předpokládejme, že agent zná všechny formule v Ψ a že Ψ logicky implikuje φ. Protože agent zná Ψ, všechny formule z Ψ platí v možných stavech. Ale v nemožném stavu φ platit nemusí, přestože Ψ platí. Agent nemusí znát φ, protože φ nemusí platit v nějakém nemožném stavu, který agent považuje za možný. Kladením různých podmínek na na syntaktické přiřazení σ v nemožných stavech můžeme zachytit různé vlastnosti znalosti.

Nestandardní strukturu $M = (S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots \mathcal{K}_n, ^*)$ můžeme ztotožnit se strukturou nemožných světů $M' = (S, W, \sigma, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$, kde W je množina standardních stavů, tj. stavů pro které platí $s = s^{**}$, a pro všechny stavy $s \in S$ platí: $\sigma(s)(\varphi) = \mathbf{true}$ právě když $(M, s) \models \varphi$.

Definice 4.3.4 *Řekneme, že formule $\varphi \in \mathcal{L}_n$ je validní ve standardních stavech (angl. standard–state valid), jestliže φ je pravdivá v každém standardním stavu každé nestandardní struktury.*

Analogicky definujeme logickou implikaci ve ve standardních stavech (angl. standard–state logical implication).

Věta 4.3.1 *Nechť φ_1 a φ_2 jsou formule z jazyka $\mathcal{L}_n$. Pak φ_1 logicky implikuje ve standardních stavech formuli φ_2 právě když $\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2$ je validní ve standardních stavech.*

Znalost je vyhodnocována vzhledem ke všem stavům, ale logická implikace je vyhodnocována jen vzhledem je standardním stavům.

Definice 4.3.5 *Nechť formule ϕ obsahuje právě výrokové proměnné $p_1, \ldots, p_n$. Pak formuli $complete(\varphi)$ definujeme jako $(p_1 \vee \neg p_1) \wedge \ldots (p_n \vee \neg p_n)$.*

Formuli $coherent(\varphi)$ definujeme jako $((p_1 \wedge \neg p_1) \hookrightarrow \mathbf{false}) \wedge \ldots \wedge ((p_n \wedge \neg p_n) \hookrightarrow \mathbf{false})$.

Věta 4.3.2 *Nechť φ je tautologie standardní výrokové logiky. Pak $K_i(complete(\varphi)) \Rightarrow K_i\varphi$ je validní ve standardních stavech.*

Neplatí znalost validních formulí ani uzávěr nad logickou implikací.

Věta 4.3.3 *Nechť φ a ψ jsou standardní výrokové formule. Pak $(K_i(coherent(\varphi) \wedge K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow k_i\psi$. je validní ve standardních stavech.*

4.4 Vědomá znalost

Aby agent mohl usuzovat o formuli, musí si ji uvědomovat (angl. aware).

Zavedeme nový modální operátor A_i pro každého agenta i. Formuli $A_i\varphi$ můžeme číst „i si uvědomuje všechny proměnné z φ“, „i je schopen vypočítat pravdivost φ“ nebo „i je schopen spočítat pravdivost φ v čase T“.

Pro reprezentaci znalosti agenta i máme dva modální operátory: K_i pro implicitní znalost (angl. implicit knowledge) a X_i pro explicitní znalost (angl. explicit knowledge) pro každé i. Implicitní znalost jsme studovali doposud. Explicitní znalost formule φ znamená, že agent si uvědomuje φ a implicitně zná φ.

Definice 4.4.1 *Množinu formulí získanu rozšířením $\mathcal{L}_n(\Phi)$ o modální operátory A_i a X_i označíme $\mathcal{L}_n^A(\Phi)$. Zkráceně píšeme $\mathcal{L}_n^A$.*

Definice 4.4.2 *Uvědoměná struktura (angl. awareness structure) M je $(2n+2)$-jice $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, kde $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$ je Kripkeho struktura a $\mathcal{A}_i$ je funkce, která každému stavu přiřazuje množinu fomulí, pro $i = 1, \ldots, n$.*

Definice 4.4.3 *Formule, které si agent uvědomuje ve stavu s označíme $A_i(s)$.*

Definice 4.4.4 *Sémantika výrokových proměnných, konjunkce, negace a oprátoru K_i je stejná jako u standardních Kripkeho struktur 1.1.2.*

$(M, s) \models A_i\varphi$ právě když $\varphi \in \mathcal{A}_i$;

$(M, s) \models X_i\varphi$ právě když $(M, s) \models A_i\varphi$ a $(M, t) \models \mathcal{K}_i\varphi$ pro všechna t taková, že $(s, t) \in \mathcal{K}_i$.

Operátor $K_i\varphi$ má stejné vlastnosti jako v Kripkeho strukturách: je uzavřený na materiální implikaci a $K_i\varphi$ je validní pro každou validní formuli φ. Operátor explitní znalosti $X_i\varphi$ nemá žádné vlastnosti, agent nemusí znát všechny validní formule, explitní znalost není uzavřená na materiální implikaci. Operátor A_i je syntaktický operátor a proto má mnoho vlastností uvedených v syntaktickém přístupu 4.1.1.

Na relace $\mathcal{A}_i$ můžeme klást následující typická omezení:

- Jestliže $\varphi \in \mathcal{A}_i(s)$ a ψ je podformule φ, pak $\psi \in \mathcal{A}_i(s)$. Nebo podobně: Jestliže $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{A}_i(s)$, pak $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i(s)$. Jestliže pro výpočet pravdivost formule φ musíme vypočítat pravdivost všech jejích podformulí.

- $\mathcal{A}_i = \Psi$, kde $\Psi \subseteq \Phi$. Pokud si agent uvědomuje jen některé výrokové proměnné.

- Jestliže $\varphi \in \mathcal{A}_i(s)$, pak $A_i\varphi \in \mathcal{A}_i(s)$. Sebereflexivní agent, který si uvědomuje co si uvědomuje. Odpovídá axiomu $A_i\varphi \Rightarrow A_iA_i\varphi$.

- Jestliže $(s,t) \in \mathcal{K}_i$, pak $\mathcal{A}_i(s) = \mathcal{A}_i(t)$. Agent ví, které formule si uvědomuje. Odpovídá axiomům $A_i\varphi \Rightarrow K_iA_i\varphi$ a $\neg A_i\varphi \Rightarrow K_i\neg A_i\varphi$.

Protože sémantika K_i se nezměnila, je tento operátor korektní. Korektní a úplnou axiomatizaci získáme přidáním axiomu $X_i\varphi \Leftrightarrow (A_i\varphi \wedge K_i\varphi)$ k K_n .

Vlastnosti implicitní znalosti můžeme relativizovat k uvědomnění. Z distributivního axiomu $K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi$ dostáváme

$$(X_i\varphi \wedge X_i(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge A_i\psi) \Rightarrow X_i\psi.$$

Podle pravidla generalizace znalosti dostáváme:

$$\text{Z } \varphi \text{ odvoď } A_i\varphi \Rightarrow X_i\varphi.$$

Jestliže předpokládáme $\mathcal{A}_i$ reflexivní, dostáváme axiom

$$X_i\varphi \Rightarrow \varphi.$$

Ale už neplatí axiomy introspekce:

$$(X_i\varphi \wedge A_iX_i\varphi) \Rightarrow X_iX_i\varphi$$

$$(\neg X_i\varphi \wedge A_i(\neg X_i\varphi)) \Rightarrow X_i(\neg X_i\varphi)$$

Můžeme předpokládat, že jestliže agent nedokáže rozlišit dva stavy, pak si v nich uvědomuje stejné formule, tj. $(s,t) \in \mathcal{K}_i$ implikuje $\mathcal{A}_i(s) = \mathcal{A}_i(t)$. Agentova znalost může být uzavřena na materiální implikaci, tj. $(X_i\varphi \wedge X_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow X_i\psi$ je validní.

4.5 Kontextová znalost

Jediná možnost, jak může mít agent i ve standardní Kripkeho struktuře nekonzistentní znalost ve stavu s je, že $\mathcal{K}_i(s) = \{t | (s,t) \in \mathcal{K}_i\}$ bude prázdná, což implikuje, že ve stavu s agent i zná každou formuli.

Ve standardních Kripkeho strukturách má agent jediný kontext znalosti: $\mathcal{K}_i(s)$ je množina stavů, které agent i považuje za možné. Nyní uvažujeme více kontextů, každému odpovídá jiná znalost.

Definice 4.5.1 *Kontextová struktura*[1] *je $(n+2)$-jice $M = (S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$, kde S je množina stavů, π je pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných pro každý svět $s \in S$ a $\mathcal{C}_i(s)$ je neprázdná množina podmnožin S.*

[1] V [**?**] používají autoři pro kontextovou znalost pojem local reasoning. Pro kontextové struktury používají pojem local-reasoning structure.

Jestliže $\mathcal{C}_i(s) = \{T_1, \ldots, T_n\}$, pak ve stavu s agent i uvažuje někdy množinu možných stavů (kontext) T_1, někdy T_2, atd.

Definice 4.5.2 *Sémantika výrokových proměnných, konjunkce a negace je stejná jako u standardních Kripkeho struktur.*

$(M, s) \models K_i\varphi$ *právě když pro nějaké* $T \in \mathcal{C}_i(s)$ *takové, že* $(M, t) \models \varphi$ *pro všechna* $t \in T$.

Agent může mít nekonzistentní znalost ($K_i\varphi \wedge K_i\neg\varphi$) i znát sporné formule ($K_i(\varphi \wedge \neg\varphi)$).

Jestliže v kontextové struktuře $M = (S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ jsou všechna $\mathcal{C}_i(s)$ singletony pro každý stav $s \in S$, označme $\mathcal{C}_i(s) = \{T_i^s\}$. Pak M je ekvivalentní Kripkeho struktuře $(S, \pi, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$, kde $(s, t) \in \mathcal{K}_i$ právě když $t \in T_i^s$.

Kontextové struktury jsou speciální Montague-Scott struktury. Pro kontextovou stukturu $M = (S, \pi, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ označme $\mathcal{C}_i'$ množinu všech supermnožin (TODO) prvků $\mathcal{C}_i$. MS struktura $M' = (S, \pi, \mathcal{C}_1', \ldots, \mathcal{C}_n')$ je ekvivalentní kontextové struktuře M v tom smyslu, že $(M, s) \models \varphi$ právě když $(M', s) \models \varphi$.

Uzávěr nad konjunkcí neplatí v kontextových strukturách. Znalost není uzavřena na materiální implikaci. Platí následující typy vševědoucnosti: znalost validních formulí a uzávěr nad logickou implikací.

Věta 4.5.1 *Následující je korektní a úplná axiomatizace validnosti vzhledem ke kontextovým strukturám:*

A1. Všechny instance tautologií výrokové logiky

R1. Z φ *a* $\varphi \Rightarrow \psi$ *odvoď* ψ *modus ponens*

R2. Z φ *odvoď* $K_i\varphi$ *znalost validních formulí (angl. knowledge of valid formulas)*

R3. Z $\varphi \Rightarrow \psi$ *odvoď* $K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi$ *uzávěr nad validní implikací (angl. closure under valid implication)*

Na množiny $\mathcal{C}_i$ můžeme klást podmínky pro zachycení různých vlastností. Sporná tvrzení mohou být zakázána podmínkou, že $\mathcal{C}_i(s)$ musí být neprázdná. Uzávěr nad materiální implikací vynutíme podmínkou, že vždy musí existovat kontext ve kterém agent zná vše, co zná v jiných kontextech. Předpokladem, že s je prvek každé $T \in \mathcal{C}_i(s)$, dostáváme, že $K_i\varphi \Rightarrow \varphi$ je validní.

Literatura

[CK98] Silvia Coradeschi and Lars Karlsson. A behavor-based approach to rectivity and coordination: A preliminary report. In Munidar P. Singh, Anand Rao, and Michael J. Wooldridge, editors, *Intelligent Agents IV: Agent Theories, Architectures, and Languages / ATAL '97 Providence*, pages 107–111. Springer–Verlag, 1998.

[FG97] Stan Franklin and Art Graesser. Is it an agent, or just a program?: A taxonomy for autonomous agents. In Jörg P. Müller, Michael J. Wooldridge, and Jennings Nicholas R., editors, *Intelligent Agents III: Agent Theories, Architectures, and Languages / ECAI '96 Workshop (ATAL)*, pages 21–35. Springer–Verlag, 1997.

[FHMV95] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1995.

[MWR97] Jörg P. Müller, Michael J. Wooldridge, and Jennings Nicholas R., editors. *Intelligent Agents III: Agent Theories, Architectures, and Languages / ECAI '96 Workshop (ATAL)*. Springer–Verlag, 1997.

[MWT96] Jörg P. Müller, Michael J. Wooldridge, and Milind Tambe, editors. *Intelligent Agents II: Agent Theories, Architectures, and Languages / IJCAI '95 Workshop (ATAL)*. Springer–Verlag, 1996.

[SK98] Rina Schwartz and Sarit Kraus. Bidding mechanisms for data allocation in multiagent environments. In Munidar P. Singh, Anand Rao, and Michael J. Wooldridge, editors, *Intelligent Agents IV: Agent Theories, Architectures, and Languages / ATAL '97 Providence*, pages 61–75. Springer–Verlag, 1998.

[SRW98] Munidar P. Singh, Anand Rao, and Michael J. Wooldridge, editors. *Intelligent Agents IV: Agent Theories, Architectures, and Languages / ATAL '97 Providence*. Springer–Verlag, 1998.

[TSG96] Paolo Traverso, Luca Spalazzi, and Fausto Giunchiglia. Reasoning about acting, sensing and failure handling: A logic for agents embedded in the real world. In Jörg P. Müller, Michael J. Wooldridge, and Milind Tambe, editors, *Intelligent Agents II: Agent Theories, Architectures, and Languages / IJCAI '95 Workshop (ATAL)*. Springer–Verlag, 1996.

[Wei00] Gerhard Weiss. *Multiagent Systems: A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2000.

[WJ95] Michael J. Wooldridge and Nicholas R. Jennigs. Intelligent agents: Theory and practice. *Knowledge Engineering Review*, 10(2):115–152, 1995.

[Woo00] Michael J. Wooldridge. *Reasoning about Rational Agents*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, 2000.

[Woo01] Michael J. Wooldridge. *An Introduction to MultiAgent Systems*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 2001.