

Zápočtová písemka z NMAI059  
15.12.2015

1. Zákazník velkého sportovního řetězce se účastní vánoční akce pro VIP klienty. Losuje se o cenné dary. Z urny se vytahují lístky s bílou, červenou nebo modrou barvou, přičemž bílé lístky jsou nevýherní, z červených lístků nabízí každý desátý lístek zákazníkovi slevu 1000 Kč (ostatní červené žádnou slevu nenabízí), každý modrý lístek slevu 500 Kč. Poměr lístků v urně je 80 procent bílých, 5 procent červeným a zbylé jsou modré.
  - (a) Každý zákazník smí vylosovat 3 lístky. S jakou pravděpodobností si vytáhne zákazník alespoň jeden lístek se slevou?
  - (b) Zákazník si vytáhl jeden bílý, jeden modrý a jeden červený, dá lístky do kapsy a dva mu (náhodně) vypadnou. Jaká je pravděpodobnost, že v kapse zůstal lístek se slevou?
  - (c) Zákazník bez členské karty si mohl vylosovat jen jeden lístek. Tento zákazník měl štěstí a u pokladny uplatnil slevu. Jaká je pravděpodobnost, že k tomu použil červený lístek?
2. Maminka umístí na štědrovečerní stůl 10 svíček, které ve stejnou chvíli zapálí. Rozdělení doby svícení jedné svíčky je

$$f(x) = ae^{-bx}, \quad x > 0, b > 0. \quad (1)$$

Pravděpodobnost, že svíčka hoří déle než hodinu, je  $e^{-2}$ . Svíčky zhasínají nezávisle na sobě.

- (a) Spočítejte konstanty a, b (využijte základní vlastnosti hustoty).
  - (b) Jaká je střední hodnota doby svícení jedné svíčky?
  - (c) Jaká je pravděpodobnost, že za hodinu svítí více než polovina svíček? Určete rozdělení počtu svíček, které po hodině ještě nezhasly. Jaký je střední počet svíček, které stále svítí?
3. Náhodný vektor  $(X, Y)$  má hustotu

$$f(x, y) = cxe^{-y}, \quad 0 < x < 1, y > 0. \quad (2)$$

- (a) Určete konstantu c a marginální hustoty.
  - (b) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé a zjistěte jejich kovarianci.
  - (c) Jaké je rozdělení  $X + Y$  ?
4. Uvažujte zadání z příkladu 2, přičemž máme k dispozici dostatek svíček. Pomocí CLV spočítejte, kolik svíček potřebujeme zapálit k tomu, abychom s pravděpodobností větší nebo rovnou 0.95 měli po hodině od zapálení svíček alespoň 10 svítících.