Složitost her

Herní algoritmy

Otakar Trunda

Úvod – měření složitosti

- Formální výpočetní model – Turingův stroj
- Složitost algoritmu = závislost spotřebovaných prostředků na velikosti vstupu
- Časová složitost stroje M:

$$F_M(n) = \max_{w \in \Sigma^*} \{ \#\, kroků\ M(w) \mid M(w)\ se\ zastaví \wedge |w| \leq n \}$$

- Paměťová složitost stroje M:

$$F_M(n) = \max_{w \in \Sigma^*} \{ \#\, použitých\ paměťových\ buněk\ M(w) \mid M(w)\ se\ zastaví \wedge |w| \leq n \}$$

- Složitost problému = složitost nejlepšího algoritmu řešícího daný problém

Úvod – třídy složitosti

- P = problémy řešitelné v polynomiálním čase
- NP = problémy řešitelné v polynomiálním čase na NTM
- PSPACE = problémy řešitelné v polynomiálním prostoru
- EXPTIME = problémy řešitelné v exponenciálním čase
- NEXPTIME = problémy řešitelné v exponenciálním čase na NTM
- EXPSPACE = problémy řešitelné v exponenciálním prostoru
- R = třída rekurzivních (rozhodnutelných) problémů
- R.E. = třída rekurzivně spočetných problémů

- Vztahy mezi třídami:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq R \subseteq R.E.$$

$$P \neq EXPTIME \quad NP \neq NEXPTIME \quad PSPACE \neq EXPSPACE \neq R \neq R.E.$$

Složitost her

- Složitost hry = složitost problému *„má hráč X vynucenou výhru v dané pozici?“*
- Pro pevně danou velikost hrací plochy je složitost hry konstantní !
- Zobecněné hry – definujeme hru pro libovolně velkou hrací plochu
- Složitost hry měříme vzhledem k velikosti hrací plochy
- Je možné klasifikovat hry do kategorií odpovídajících třídám složitosti?

Klasifikace her

- Podle počtu hráčů – 0, 1, 2, více
- Podle velikosti hrací plochy
  - Omezená x neomezená
- Podle míry sdílení informací
  - Úplná x skrytá informace
- Podle maximální délky hry (partie)
  - Polynomiálně dlouhá, omezená, neomezená
- Další dělení…
  - Např. Hra jednotlivců x týmová hra

Jak těžká může být hra

- Příklad: hra Life na neomezené ploše
  - Žádný hráč, pouze diskrétní simulace
  - Neomezená délka hry
- Otázka: *„Bude daná buňka někdy aktivní?“* je algoritmicky nerozhodnutelná !
- Poučení: Hry na neomezené ploše jsou
  - těžké
  - v praxi nerealizovatelné
  - nevhodné pro měření a porovnávání složitosti
- Existují těžké (např. nerozhodnutelné) hry využívající pouze konečné prostředky?

Hry 0 hráčů

- Diskrétní simulace na omezené ploše
- Příklad: (omezený) celulární automat
- S polynomiálně omezenou délkou
  - Odsimulujeme, zkontrolujeme výsledek
  - Odpovídající třída: P
- S neomezenou délkou
  - Umožňuje simulovat Space-bounded TM
  - Odpovídající třída: PSPACE

Hry jednoho hráče

- Hlavolamy
- Lloydova 15, sudoku, Rubikova kostka, algebrogramy, Peg Solitaire, ale také SAT, TSP, …
- Cílem je najít posloupnost tahů, která vede k výhře
- Hry s polynomiálně omezenou délkou:
  - Typicky existuje polynomiální „zdroj“, který se během hry spotřebovává, tahy jsou nevratné
  - Lze ověřit, zda dané (polynomiální) řešení je správné
  - Odpovídající třída: NP

Hry jednoho hráče

- Hry s neomezenou délkou:
  - Tahy jsou typicky vratné
  - Např. Sliding-block puzzle
  - Lze řešit v polynomiálním prostoru na NTS:
    - Uhodnu správný tah, zahraju ho
    - Opakuju, dokud nedojdu do cíle
    - Pamatuji si pouze současnou pozici a tah
  - Odpovídající třída: PSPACE

Hry dvou hráčů

- S úplnou informací, na omezeném prostoru
- Typický příklad „hry“
- Šachy, go, hex, reversi, …, QBF
- Hry s polynomiálně omezenou délkou:
  - Např. hex, reversi, amazons
  - Vždy lze vyřešit v PSPACE prohledáním celého stromu hry (do hloubky)
  - Převodem z QBF lze ukázat PSPACE-úplnost
  - Odpovídající třída: PSPACE

Hry dvou hráčů

- Hry s (polynomiálně) neomezenou délkou:
  - Šachy, dáma, go, …, G6
  - Typicky EXPTIME-úplné – lze ukázat převodem z G6
  - Příklad převodu - šachy

Další zvyšování složitosti

- Přidávání dalších hráčů nezvyšuje (asymptotickou) složitost
- Další pokusy:
  - Týmové hry
  - Složené hry
  - Hry bez opakování
  - Hry s neúplnou informací

Další zvyšování složitosti

- Přidávání dalších hráčů nezvyšuje (asymptotickou) složitost
- Další pokusy:
  - Týmové hry
  - Složené hry
  - Hry bez opakování
  - Hry s neúplnou informací

Hry bez opakování

- 2 hráči, úplná informace
- Tah, který opakuje již navštívenou pozici, není povolený
- Příklad: hra Go s pravidlem super-ko
- Samotné nalezení přípustných tahů vyžaduje exponenciální prostor
- Šachy bez opakování – EXPSPACE-úplné
- Go se super-ko – zatím otevřený problém

Další zvyšování složitosti

- Přidávání dalších hráčů nezvyšuje (asymptotickou) složitost
- Další pokusy:
  - Týmové hry
  - Složené hry
  - Hry bez opakování
  - Hry s neúplnou informací

Týmové hry s neúplnou informací

- Hry s polynomiálně omezenou délkou
  - Např. Bridge
  - Obecně jsou až NEXPTIME-úplné (převodem z DQBF)
- Hry s (polynomiálně) neomezenou délkou
  - Např. Rengo Kriegspiel (varianta go)
  - Mohou být obecně nerozhodnutelné (přestože hrajeme na omezené ploše)

Složitost her - shrnutí

		Typ hry				
		0 hráčů (simulace)	1 hráč (hlavolam)	2 hráči s úplnou informací	2 hráči bez opakování	Týmová se skrytou informací
Délka hry	omezená	P	NP	PSPACE	PSPACE	NEXPTIME
	neomezená	PSPACE	PSPACE	EXPTIME	EXPSPACE	R.E.

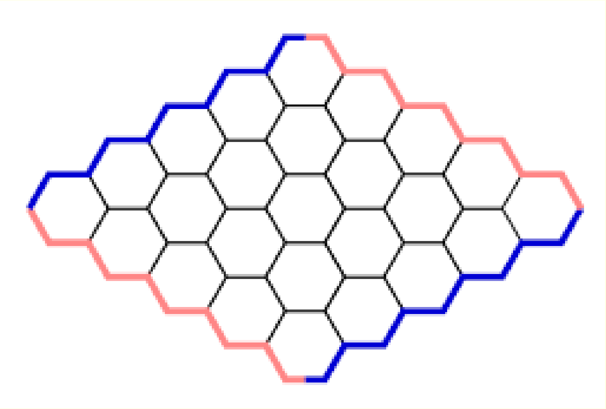
Složitost her - shrnutí

- Pojem „hra“ je značně obecný, různé problémy lze formulovat jako hry
- Vysoká složitost je u her žádoucí (jednoduché hry nejsou zajímavé)
- Univerzalita her – hra může sloužit jako výpočetní model pro příslušnou třídu
  - Mnoho her představuje úplné problémy pro danou třídu
  - Umět dobře hrát hru znamená umět „všechno“
  - Využití Human-based computation?

Složitost některých známých her

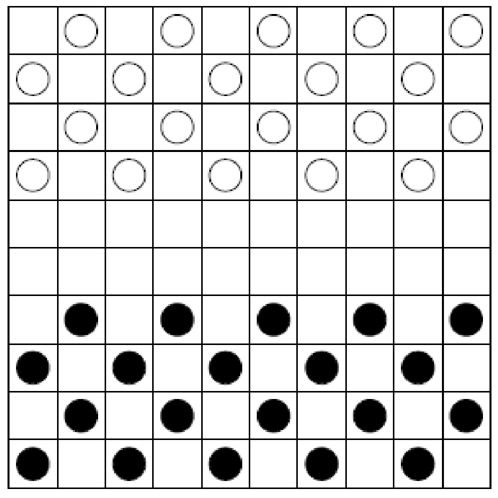
Hex

- Nemůže nastat remíza
- První hráč má vždy vyhrávající strategii
- Složitost zobecněné hry: PSPACE-úplná
- Otevřená otázka: Jak „jednoduše“ popsat vyhrávající strategii (v závislosti na velikosti desky)



Dáma

- Na desce 8x8 je hodnota hry remíza
- Pro jinou velikost desky a jiné startovní pozice zatím otevřený problém
- Složitost hry:
  - Polynomiálně omezená délka: PSPACE-úplná
  - Jinak EXPTIME-úplná

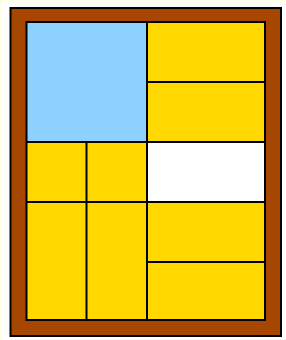


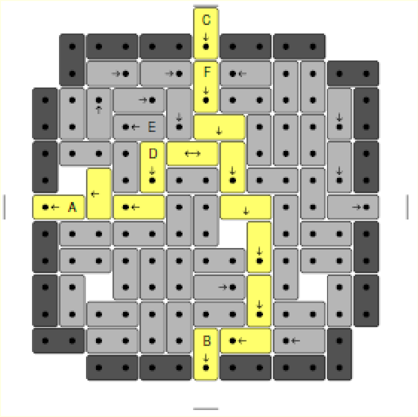
Go

- Různé verze pravidel ovlivňují třídu složitosti
  - Bez ko: PSPACE-težké
  - Japonská verze: EXPTIME-úplné
  - Americká verze: pravděpodobně EXPSPACE-težké
- Jiné otázky související s go:
  - „žebříky“: PSPACE-úplné
  - život skupiny: různé formy, min. NP-úplné
  - …

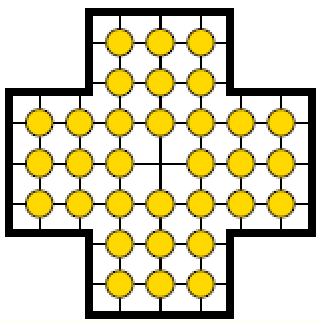
Hry jednoho hráče

- Sliding blocks puzzle
  - PSPACE-úplná
  - Různé varianty:





- Peg Solitaire
  - NP-úplná
  - Jednorozměrná varianta je v P
- Hledání min
  - coNP-těžká



Reference:

- *Games, Puzzles, and Computation* - Robert Aubrey Hearn
- *Playing Games with Algorithms: Algorithmic Combinatorial Game Theory* - Erik D. Demaine, Robert A. Hearn
- *Computing a perfect strategy for n x n chess requires time exponential in n* - Aviezri S. Fraenkel, David Lichtenstein
- *On the NP-Completeness of Cryptarithms* - David Eppstein

- Lze nalézt na http://www.ms.mff.cuni.cz/~truno7am/slozitostHer/